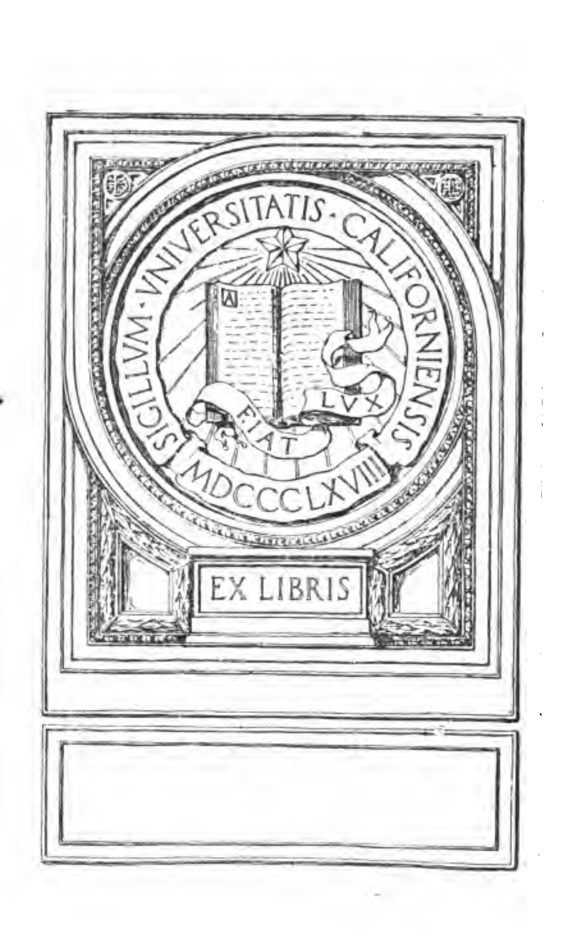
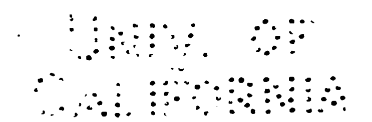

UC-NRLF
$B 32 882


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS





GRUNDLAGEN DER FLUGTECHNIK

ENTWERFEN UND BERECHNEN VON FLUGZEUGEN

VON

DR.-ING. H. G. BADER
BERLIN

MIT 47 FIGUREN IM TEXT

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1920

Vorwort.

Dieses Buch hat die Aufgabe, alle Rechnungsvorgänge — unter Ausschluß der Festigkeitsberechnungen[1]) — zu entwickeln, die der Flugzeugkonstrukteur zu verfolgen hat, wenn er seiner Verantwortung in vollem Umfange genügen will. Demgemäß werden Ergebnisse von Messungen und Strömungstheorien nur mitgeteilt, soweit sie unentbehrliche Voraussetzungen für die Berechnung von Flugleistungen und Flugeigenschaften sind.

Für die Berechnung der Flugleistungen, für die Geschwindigkeit, Steig- und Tragfähigkeit, als Maßstab gelten dürfen, werden theoretisch begründete und empirisch belegte Voraussetzungen[2]) über die Abnahme der Motorleistung in der Höhe eindeutig angegeben. Zur außerdem erforderlichen Bestimmung der Luftschrauben und ihrer Wirkungsgrade dienen Darstellungen von noch nicht veröffentlichten Versuchsergebnissen die Dr.-Ing. Schaffran mit Bronzemodellschrauben im Kanal der Versuchsanstalt für Wasser- und Schiffbau (Berlin) gewonnen hat. Da diese Versuchsreihen die größte planmäßige Folge von Messungen bedeuten, die einer strengeren Kritik hinsichtlich ihrer Übertragbarkeit auf Luftschrauben natürlicher Größe standhalten, bin ich für die Überlassung der Ergebnisse zur Veröffentlichung Herrn Dr.-Ing. Schaffran zu besonderem Dank verpflichtet.

Jedoch nicht allein mit Bezug auf die Flugleistungen, sondern vor allem hinsichtlich der Flugeigenschaften, die durch Stabilität und Steuerbarkeit zu kennzeichnen sind, soll der Einfluß des Konstrukteurs im vollen

---

1) Für die statische Berechnung der Zelle verweise ich auf die grundlegenden Arbeiten:

H. Reißner und E. Schwerin: „Die Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme", Jahrbuch der wissenschaftl. Gesellschaft für Luftfahrt, Bd. IV.

Müller-Breslau: „Zur Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme", Technische Berichte, herausgegeben von der Flugzeugmeisterei der Inspektion der Fliegertruppen, Charlottenburg, Bd. II, S. 485.

2) Die bisher fast ausschließlich übliche Darstellung der Motorleistung als Potenzfunktion der Luftdichte läßt sich aus der Theorie der Verbrennungskraftmaschinen in keiner Weise begründen.

Umfange aufgezeigt und scharf abgegrenzt werden. Zu dem Zweck hat man nicht nur wie üblich die Bewegungsgleichungen des Flugzeugs anzuschreiben und aus ihnen formelhaft Stabilitätsbedingungen zu entwickeln, sondern zur Bestimmung der Steuerbarkeit müssen in diese Bewegungsgleichungen Störungsfunktionen eingeführt werden, und die rechnerischen Ergebnisse, die sich aus den Bewegungsgleichungen mit und ohne Störungsfunktion entwickeln lassen, müssen aus der Anschauung der Bewegungsvorgänge heraus mechanisch erklärt werden. Denn in nur blindem Gehorsam gegenüber einer Formel, ohne Anschauung ihrer Bedeutung, wird kein Konstrukteur folgerichtige Maßnahmen treffen können. Die Mathematik muß, soll sie der Praxis dienen, auf die Rolle eines formalen Zwischengliedes verwiesen werden zwischen den anschaulichen Vorstellungen, auf denen der Ansatz der Gleichungen beruht, und denjenigen, die sich aus deren Lösungen entwickeln lassen. Denn eine noch so sichere und klare mathematische Entwicklung ist für den Konstrukteur ohne jeden Wert, wenn die Lösung der Aufgabe nicht wieder zu den Vorstellungen in Beziehungen gesetzt wird, von denen man bei Stellung der Aufgabe ausgegangen ist.

Doch nicht nur für die Darstellung, sondern auch rein rechnerisch ergeben sich hier Schwierigkeiten. Sobald die Frequenzgleichungen der gekoppelten Bewegungen aufgestellt sind, eröffnen sich keine Wege, algebraisch korrekt weiter zu kommen. Denn Gleichungen höheren als dritten Grades sind exakt nicht lösbar. Man muß also versuchen, möglichst allgemeingültige algebraische Näherungslösungen anzugeben. Hierzu habe ich einen Weg eingeschlagen, der zu einer, wie ich wohl annehmen darf, endgültigen Form der Lösungen führt.

Demnächst bietet die restlose dynamische Ausdeutung der rechnerischen Ergebnisse, wie gesagt, diejenige Aufgabe, deren Erfüllung ihnen überhaupt erst Wert verleiht. Eine ganze Reihe von Arbeiten hat sich zwar schon früher mit den Problemen der Längs- und Seitenstabilität beschäftigt.[1]) Aber so bedeutend die Aufklärungen sind, die man aus diesen Arbeiten gewinnen kann[2]), in umfassender Weise sind darin die komplexen Erscheinungen nicht, wie es das äußerste Ziel der Wissenschaft überhaupt ist, zu Beziehungen letzter einfacher Größen aufgelöst. Einen Versuch in dieser Richtung habe ich unternommen. Freilich gestattete der Zweck des Buches nicht eine Ausführlichkeit, die der Bequemlichkeit des Lesers entgegengekommen wäre, doch schließlich kann ja auch die

---

1) Vgl. die bewertenden Aufstellungen Reißners, Jahrbuch der Luftfahrt 1912, S. 349, und Jahrbuch der wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt, Band III, S. 139 ff.

2) Siehe Literaturverzeichnis Nr. 10, 11, 12, 13, 18, 22, 25, 36—40.

breiteste Darstellung die Fülle der Wirklichkeit nie erschöpfen. Es galt also nur Anschauungen zu vermitteln, die der Entscheidung von Fall zu Fall als Grundlage dienen.

Denn das ist die Aufgabe der Theorie in der Technik überhaupt. Die Theorie hat lediglich Erfahrungen in innere Zusammenhänge zu bringen, sie zu Gesetzmäßigkeiten zu gestalten, aus deren Kenntnis heraus die Praxis zielbewußt die Formgebung von Stoffen und Leitung von Kräften zu bewirken hat. Freilich sind die Bedingungen, unter denen sich die Theorie gerade in der Flugtechnik Anerkennung erzwingen muß, denkbar ungünstig. Der Flugzeugbau durfte in Anbetracht der Bedeutung des Flugzeugs für die Rüstung zu dessen Entwicklung einen geradezu unglaublichen Aufwand treiben, bei dem man es weder auf Menschenleben noch materielle Kosten ankommen ließ, und tastete sich so verhältnismäßig schnell zu Formen hin, die, wie auch die Wissenschaft anerkennen muß, an Leistungsfähigkeit für die Aufgaben und unter den Bedingungen des Krieges häufig nur noch durch Verbesserung der Rohstoffe und Entwicklung der Motortechnik übertroffen werden konnten. Denn jedes Flugzeug, zumal das Kriegsflugzeug mit der Fülle seiner Aufgaben, stellt einen Kompromiß dar, da zu mindesten schon die rein technischen Forderungen einer Verbesserung der Flugleistungen, Flugeigenschaften und der Landungsfähigkeit, sich untereinander und gegenseitig widersprechen. Die Wissenschaft hätte es wesentlich leichter, auch in der Flugtechnik sich Geltung zu verschaffen, wenn jemals Höchstleistungen nur in einer bestimmten Richtung, etwa der Geschwindigkeit oder der Steigfähigkeit oder der Wendigkeit usf. gefordert würden, da sie dann rechnerisch auf den ersten Wurf diese Aufgabe erfüllen könnte. Aber auch in dieser Hinsicht bietet sich ihr kein wesentlicher Vorsprung; denn Flugleistungen und Flugeigenschaften sind, wie zum Teil ja schon an sich in der Natur des Maximums liegt, hinsichtlich der Dimensionierung ziemlich unempfindlich, und der Charlatan müßte bei einer derartigen Aufgabe in der Dimensionierung schon sehr weit fehlgreifen, um erheblich unter dem Leistungsmaximum zu bleiben. Das bedeutet jedoch keineswegs, daß die Wissenschaft in der Flugtechnik überhaupt keine Aufgaben mehr zu erfüllen hätte und nur zur erklärenden Bestätigung von Erfolgen und Mißerfolgen berufen wäre. So oft Aufgaben an die Flugtechnik herantreten, die außerhalb ihres bisherigen Erfahrungsbereichs liegen, wie dies z. B. jetzt beim Übergang vom Kriegs- zum Verkehrsflugzeug der Fall ist, ist es allein der Wissenschaft möglich, eine Lösung anzugeben, die bei qualitativ und quantitativ bewußtem Kompromiß ohne weiteres als unter den gegebenen Umständen endgültig bezeichnet werden muß.

Um zu zeigen, in welcher Weise etwa bei der Berechnung eines neuen Flugzeugs zu verfahren ist, wird zur Ergänzung der in den vorhergehen-

den Kapiteln entwickelten Rechnungsvorgänge, im vorletzten Kapitel auf Grund einer konkreten Konstruktionsaufgabe, deren Lösung und der entsprechende Entwurf eines Flugzeugs durchgeführt.

Im letzten Kapitel habe ich schließlich versucht, die auf Grund algebraischer Rechnungen im Buch entwickelten Gedankengänge gemeinverständlich darzustellen und diesen Gedanken, wenn möglich, eine neue Form zu geben, um auch dem Leser, der sich der Mühe unterzogen hat, das Buch durchzuarbeiten, Neues zu bieten. Die Zusammenfassung kann daher ebensowohl als Anregung zum Studium wie zum Abschluß desselben dienen.

Berlin-Schöneberg, Juli 1920.

Dr.-Ing. **H. G. Bader.**

Inhaltsverzeichnis.

Bezeichnungen.[1]

B	sk	Halbwertzeit	Gl. 257
C	kg m$^{\pm 1}$sk^2	Koeffizienten der Schwingungsgleichung	Gl. 237
D	kg m$^{\pm 1}$sk		
E	kg m$^{\pm 1}$		
F_F	m^2	Flächeninhalt der Flosse	Gl. 205
F_T	m^2	Flächeninhalt der Tragflügel	
G	kg	Gesamtgewicht	Gl. 56
H	km	Höhe	Gl. 126
L	kg m sk^{-1}	Nutzleistung der Schrauben	Gl. 58
M_l	kg m	Moment um die Längsachse	Gl. 416
M_q	kg m	Moment um die Querachse	Gl. 205
M_s	kg m	Moment um die Lotachse	Gl. 417
N	P. S.	Motorleistung	Gl. 58
P	kg	Last	Gl. 59
Q	m^2	Aufrißprojektion nichttragender Bauteile	Gl. 54
R	m	Krümmungsradius der Flugbahn	Gl. 393
R_s	m	Schraubenradius	Gl. 171
S	kg	Schraubenschub	Gl. 172
T	sk	Schwingungsdauer	Gl. 256
U	kg sk	Ableitung von X, Y, M_q nach der Winkelgeschwindigkeit um die Querachse	Gl. 288
V	kg sk		Gl. 289
W	kg m sk		Gl. 290
V	km/st	Eigengeschwindigkeit	Gl. 116
X	kg	Widerstand	Gl. 52
Y	kg	Auftrieb	Gl. 41
Z	kg	Luftkraft in Richtung der Querachse	Gl. 418
a	m	Staffelung nach vorn	Gl. 21
b	m	Flügelbreite	Gl. 1
c	m	Staffelung nach der Seite	Gl. 21
d	m	Abstand zweier Tagflächen	Gl. 21

1) Die nicht nur vorübergehend verwendet sind.

Zeichen	Einheit	Bedeutung	Gleichung
d	m	Abstand des Schwerpunkts von der Hinterkante der Flügel	Gl. 205
e	—	Grundzahl der natürlichen Logarithmen	
f	m^2	Seitensteuerflächen	Gl. 439
g	$m\,sk^{-2}$	Erdbeschleunigung	
h	m	Zellenhöhe	Gl. 46
h	m	Geschwindigkeitshöhe	Gl. 327
i		Imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$	
k	m	Maß der Pfeilform	Gl. 229
k		Konstante des Flugzeugs in Beziehung zur Seitenstabilität	Gl. 444
l	m	Abstand des „Druckpunktes", der Flossen und Steuer vom Schwerpunkt	Gl. 205
l, m, n		Konstante der Schwingungsgleichungen	Gl. 245
p, q		Konstante des Flugzeugs in Beziehung zu Stabilität	Gl. 442; Gl. 331 bzw. 443
q	$kg\,m^{-2}$	Einheitsgewicht der Tragfläche	Gl. 59
r_l	m	Trägheitsradius um die Längsachse	Gl. 416
r_q	m	„ „ „ Querachse	Gl. 290
r_t	m	„ „ „ Lotachse	Gl. 417
s	m	Abstand des Schubs vom Schwerpunkt	Gl. 293
t	m	Flügeltiefe	Gl. 2
u	m	Die Änderung der Flügeltiefe über die Spannweite	Gl. 230
v	$m\,sk^{-1}$	Eigengeschwindigkeit	Gl. 1
w	$m\,sk^{-1}$	Steiggeschwindigkeit	Gl. 57
w		Konstante des Flugzeugs in Beziehung zur Längsstabilität	Gl. 331
x, y, z	m, m, m	Koordinaten eines Flächenelements in Richtung der Längs-, Lot- und Querachse	Gl. 419, Gl. 420
$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$		Hilfsgrößen bei der Berechnung der Flügeltiefen	Gl. 89
$\mathfrak{J}$	m^2	Induzierter Widerstand	Gl. 27
$\mathfrak{K}$		Koeffizienten der Frequenzgleichungen	Gl. 260
$\mathfrak{P}$	m^2	Profilwiderstand	Gl. 55
$\mathfrak{S}$	m^2	„Schädlicher" Widerstand	Gl. 54
$\mathfrak{W}$	m^2	„Widerstand"	Gl. 53

Zeichen	Bedeutung	Gleichung
$\mathfrak{Y}$ m²	„Auftrieb"	Gl. 42
$\mathfrak{Z}$ m²	Proportionalitätskonstante des induzierten Widerstandes	Gl. 139
$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{w}$	Konstanten in Beziehung zur Längsstabilität	Gl. 353, Gl. 354, Gl. 355
α	Wirksamer Anstellwinkel	Gl. 304
β	Meßbarer „	Gl. 1
β_s	Anstellwinkel des Schubs	Gl. 292
γ	Winkel der V-Form	Gl. 419
γ	Anstellwinkel für verschwindenden Auftrieb	Gl. 6
δ	Störung des Anstellwinkels	Gl. 288
ε	Dichteverhältnis	Gl. 122
ε	Gleitwinkeltangente	Gl. 294
ζ	Momentenzahl	Gl. 5
ζ	Der Kurs	Gl. 418
η[1]	Auftriebszahl	Gl. 5
η_s	Wirkungsgrad der Schrauben	Gl. 173
ϑ	Neigung der Flugrichtung zur Wagerechten	Gl. 291
ϑ	Verminderung der Auftriebszahl am Flügelrande	Gl. 230
$\varkappa$	Wurzel der Schwebebedingung	Gl. 63
$\varkappa$	Konstante des Flugzeugs in Beziehung zu Längsstabilität	Gl. 307
$\varkappa$	Verhältnismäßige Breite der Quersteuer	Gl. 518
λ	Leistungsverhältnis des Motors	Gl. 123
λ_s	Fortschrittsgrad der Schraube	Gr. 170
μ_s	Momentenzahl der Schraube	Gl. 171
λ sk⁻¹, Λ	Wurzel der Stabilitätsbedingung	Gl. 238, Gl. 332
μ sk⁻¹	Ihr reeller Teil	Gl. 254
ν sk⁻¹	Ihr imaginärer Teil	Gl. 255
μ	Reibungskoeffizient	Gl. 522
μ	Einflußzahl des Auftriebs	Gl. 35
ν	„ „ Widerstands	Gl. 19
ξ	Widerstandszahl	Gl. 54

1) Der Techniker ist gewöhnt mit η Wirkungsgrade zu bezeichnen. Die bisher üblichen Symbole ζ_A, c_a, C_a sind jedoch für den Gebrauch in der Praxis, der schon an sich das Symbol mit Zeigern (Indices) belastest, viel zu schwerfällig. Die hier getroffene Wahl wird darnach wohl hinreichend begründet durch die Analogie mit den üblichen Symbolen X, Y für Rücktrieb und Auftrieb und ξ für die Rücktriebszahl.

π	Ludolphsche Zahl	
ϱ kg m^{-4} sk^2	Luftdichte	Gl. 1
σ	Verhältnis von Schub zu Gewicht	Gl. 295
σ	Schränkungswinkel zwischen Flosse und Flügel	Gl. 214
τ	Änderung des Winkels zwischen Flugrichtung und Horizontaler	Gl. 289
τ min	Steigzeit	Gl. 156
φ	Konstantes Glied in der Momentenzahl	Gl. 5
φ	Schräglage des Flugzeugs	Gl. 416
ψ_s	Schubzahl der Schraube	Gl. 172
ψ	Lage der Symmetrieebene gegenüber dem Kurs	Gl. 417
ψ	Profilwiderstandszahl	Gl. 55
χ	Ableitung der Momentenzahl nach der Auftriebszahl	Gl. 5
χ_s	Ableitung des Schubs nach der Geschwindigkeit	Gl. 319
ω	Verhältnismäßige Geschwindigkeitsänderung	Gl. 288

I. Die Berechnung von Auftrieb und Widerstand.

A. Die hydrodynamische Berechnung des Auftriebs und seiner Momente.

Die Berechnung des Tragflügelauftriebs gründet sich auf das Bild der allgemeinsten ebenen, wirbelfreien Strömung einer idealen unzusammendrückbaren Flüssigkeit um einen Kreis. Diese Bewegung bzw. die zugehörige Strom- und Potentialfunktion wird mit Hilfe analytischer Funktionen in der Gaußschen Ebene dargestellt und läßt sich zerlegen in eine im Unendlichen geradlinige Bewegung und eine kreisende Bewegung: Zirkulation, deren Geschwindigkeit nach außen abnimmt und im Unendlichen verschwindet. Es ist ausschließlich das Intensitätsverhältnis der beiden Bewegungen, das das Strömungsbild bestimmt, denn dies selbst gilt für beliebige absolute Größe der Geschwindigkeiten und linearen Dimensionen. Ordnet man jedem Punkt dieses Strömungsbildes durch eine Abbildungsfunktion einen Punkt in einer andern Bildebene zu, derart, daß der Kreis in ein Tragflächenprofil übergeht, ohne daß sich die Strömung im Unendlichen nach Größe oder Richtung ändert, so geht das ursprüngliche Strömungsbild in ein neues über, in dem die Geschwindigkeit am Umriß ohne weiteres, wie erforderlich, diesem parallel gerichtet ist. Die Wahl der Zirkulationsstärke im ursprünglichen Bild bestimmt in der Abbildung die Lage des Flügelprofils gegenüber der Hauptströmungsrichtung und damit auch für diese den Wert von Zirkulation und Auftrieb. Hat man die Abbildungsfunktion und damit das Profil gewählt, so ist das Strömungsbild bekannt und kann zur Berechnung des Auftriebs verwendet werden, indem man die Drucke auf dem Umfang des Profils nach dem Bernoullischen Gesetz berechnet und über den Umfang integriert. Man kann aber auch die Luftkraft nach dem Impulssatz berechnen, wonach die auf eine beliebig abgegrenzte Flüssigkeitsmenge wirkende äußere Kraft gleich der die Grenzen in der Zeiteinheit durchtretenden Bewegungsgröße ist. Auf diese Weise ist es Mises (Lit. 26) gelungen, indem er von der allgemeinsten Abbildungsfunktion nur die wichtigsten Glieder beibehält, wesentlich unabhängig von dieser eine Näherung für den Auftrieb zu entwickeln.

Bezeichnen wir mit:

ϱ kg m^{-4}sk^2 die Luftdichte

v m sk^{-1} die Strömungsgeschwindigkeit der Luft gegenüber der Fläche bzw. die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs im stetigen Fluge,

t m die Flügeltiefe,

b m die Spannweite,

β den meßbaren Anstellwinkel, d. h. den Winkel zwischen Flügelsehne und Strömungsrichtung und mit den Längen a, c und den Winkeln γ, δ Invariante der Abbildung, so gilt nach Mises für den Auftrieb

$$\frac{Y}{b} = 4\pi \sin(\beta + \gamma)\, a \cdot \varrho \cdot v^2. \tag{1}$$

und für sein Moment um die Hinterkante des Flügels (positiv im Sinne einer Vergrößerung des Anstellwinkels)

$$\frac{M}{b} = 2\pi \sin 2(\beta + \delta) \cdot c^2 \cdot \varrho \cdot v^2 + \frac{Y}{b} \cdot \frac{t}{2}. \tag{2}$$

Da γ und δ Unveränderliche des Profils sind, wachsen also Auftrieb und Moment linear mit dem meßbaren Anstellwinkel β, wenn wir von dem geringfügigen Unterschied von sinus und Bogen bei kleinen Anstellwinkeln absehen:

$$\frac{Y}{b} = 4\pi(\beta + \gamma)\, a \varrho v^2 \tag{3}$$

$$\frac{M}{b} = 4\pi(\beta + \delta)\, c^2 \varrho v^2 + \frac{Y}{b} \cdot \frac{t}{2}. \tag{4}$$

Für die Rechnung ist es zweckmäßig, diese Werte von den dimensionalen Größen unabhängig zu machen; man erhält dann für ihre Kennzeichnung (einem Vorschlag von Prandtl entsprechend, Lit. 34) reine Zahlen, die bei geometrisch und mechanisch ähnlichen Verhältnissen unabhängig von den wahren Maßen gleiche Werte annehmen. Wir erhalten so für den Auftrieb eine Auftriebszahl η und für das Moment eine Momentenzahl ζ, die entsprechend ihrer beiderseitigen linearen Abhängigkeit vom Anstellwinkel auch untereinder in linearer Beziehung stehen, die wir weiterhin in der Schreibweise

$$\zeta = \chi \cdot \eta - \varphi \tag{5}$$

zum Ausdruck bringen wollen. Es ist üblich, den Auftrieb, der Fläche des Flügels und dem doppelten Staudruck proportional zu setzen und für den Hebelarm des Moments die Tragflügeltiefe als Bezugseinheit zu wählen. Damit erhalten wir nach Gl. (3) und (4):

$$\eta = 4\pi \cdot (\beta + \gamma)\frac{a}{t} \tag{6}$$

$$\zeta = 4\pi(\beta + \delta)\frac{c^2}{t^2} + \frac{\eta}{2} \tag{7}$$

und nach Gl. (5):
$$\zeta = 4\pi(\beta + \gamma)\frac{c^2}{t^2} - 4\pi(\gamma - \delta)\frac{c^2}{t^2} + \frac{\eta}{2} \tag{8}$$

$$\chi = \frac{c^2}{at} + \frac{1}{2} \tag{9}$$
$$\varphi = 4\pi(\gamma - \delta)\frac{c^2}{t^2} \tag{10}$$

Für die Ableitungen von Auftriebszahl und Momentenzahl nach dem Anstellwinkel ergeben sich die Werte:

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \eta' = 4\pi \cdot \frac{a}{t} \tag{11}$$
$$\frac{d\zeta}{d\alpha} = \chi \cdot \eta'. \tag{12}$$

Nach Mises betragen die Invarianten der Abbildung a und c, etwa übereinstimmend, ein Viertel der Tragflügeltiefe, während Winkel γ etwa gleich dem doppelten Wölbungspfeil der Profilmittellinie, und Winkel δ nahezu gleich Null ist. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir:

$$\eta = \pi(\beta + \gamma) \tag{13}$$
$$\eta' = \pi \tag{14}$$
$$\chi = 3/4 \tag{15}$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot \gamma. \tag{16}$$

ζ verschwindet für $\eta \cong \gamma$.

Der Vergleich dieser Werte mit Messungen im Windtunnel zeigt recht gute Übereinstimmung. Nahezu unabhängig vom Profil gilt $\chi = 3/4$ (vgl. Fig. 1). Es läßt sich auch tatsächlich eine Zunahme der Beträge γ und φ mit der Wölbung feststellen. Sie wird aber stark modifiziert durch die Gestaltung des Profils, die natürlich selbst bei gegebenem Wölbungspfeil der Mittellinie sehr verschieden erfolgen kann. η' liegt für unendlich breite Flügel üblicher gewölbter Profile wenig oberhalb π.

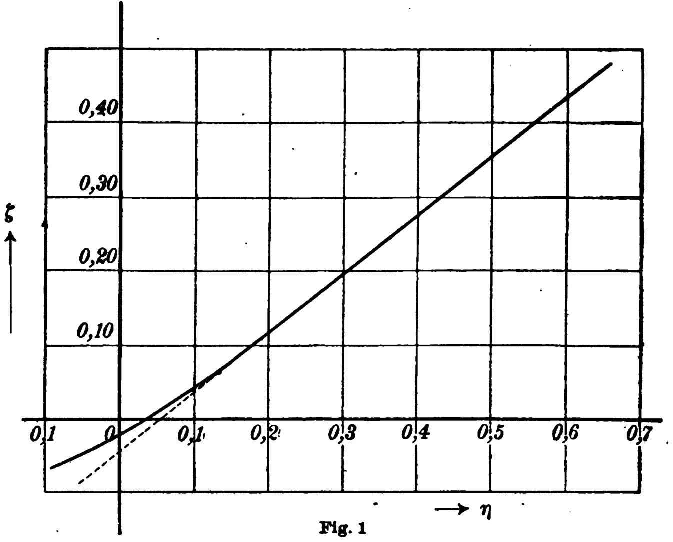


Fig. 1 zeigt für das in Figur 2 angegebene Flügelprofil gemessene Werte der Momentenzahl, in Abhängigkeit von der Auftriebszahl. Der obere Teil der Kurve ist ausgesprochen gerade und weist genau die Tangente $\chi = \frac{3}{4}$ auf. Die gestrichelte Verlängerung der Kurve bis zur Ordinatenachse schneidet auf dieser den Wert $\varphi = 0{,}04$, auf der Abszissenachse $\gamma = 0{,}055$ ab.

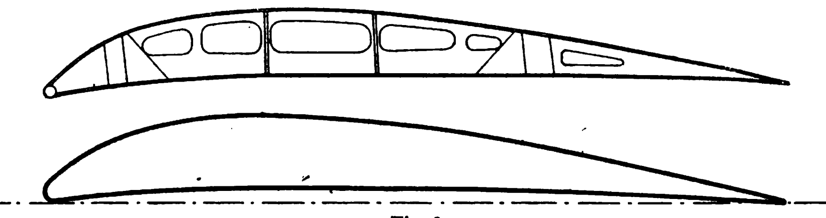


Fig. 2
zeigt den zu den Messungen Figur 1 und Figur 7 gehörigen Flügelumriß. Er ist zusammengesetzt aus zwei Parabeln mit verschiedenem Parameter, deren Scheitel gegeneinander versetzt. und deren Achsen gegeneinander verdreht sind, und die in der Nähe ihrer Scheitel durch den Abrundungskreis der Vorderkante miteinander verbunden werden. Im besonderen ist dieser Umriß entworfen unter dem Gesichtspunkt, einen möglichst großen Holmabstand und damit geringste Holmquerschnitte und -gewichte zu erreichen. Trotz der sich daraus ergebenden ungewöhnlich starken Verjüngung des Profils nach hinten sind seine ärodynamischen Eigenschaften, wie die Messungen zeigen, sehr günstig. Denn während die Profilwiderstandszahl und der Höchstwert der Auftriebszahl den besten bis jetzt untersuchten Profilen nahekommen (Lit. 30 bis 33), übertreffen sie diese noch durch die geringen Anforderungen an die Stabilisierung, wie sie durch den außerordentlich kleinen Wert $\varphi = 0{,}04$ gekennzeichnet werden.

B. Die hydrodynamische Berechnung des induzierten Widerstandes.

Bei endlicher Breite der Flügel ist η' freilich erheblich geringer (Fig. 5). Denn entsprechend dem Überdruck unter und dem Unterdruck über der Fläche tritt um die Enden eines Tragflügels herum ein Ausgleich der Drucke ein. Der damit verbundene Auftriebsverlust fällt natürlich um so mehr ins Gewicht, je geringer die Breite des Flügels ist. Druckmessungen an Flügeln (Fig. 3) haben gezeigt, daß tatsächlich der Strömungsdruck am Rande eines Flügels etwa nur halb so groß ist als in seiner Mitte. Der Druckausgleich macht sich jedoch nur bis in eine beschränkte Entfernung vom Rand aus geltend, die etwa gleich der Flügeltiefe ist.

Dieser Druckausgleich bedeutet nun andrerseits eine Umströmung der Flügelenden, d. h. die Bildung zweier Wirbel entgegengesetzten Drehsinns an den Rändern. Diese Wirbel schließen sich nach einer Hypothese von Prandtl (Lit. 35), die durch Versuche bestätigt ist, an den Rändern des Tragflügels rechtwinklig zur Flugrichtung an die Zirkulation um den Tragflügel an und setzen diese, die ja nach fundamentalen hydrodynamischen Beziehungen nicht in der Flüssigkeit enden kann, mit gleicher Stärke ins Unendliche fort. Der Unterhalt dieser Zirkulation erfordert also Leistung, d. h. die Erzeugung des Auftriebs ist nur möglich unter Überwindung eines Widerstandes, des sogenannten „induzierten“ Widerstandes. Dieser Widerstand muß sich natürlich rein strömungstheoretisch als den Tragflügel in der Flugrichtung verzögernde Kraft nachweisen lassen. Er folgt auch in der Tat aus der Veränderung des Strömungsbildes durch die „Randwirbel“. Tragender Wirbel und Rand-

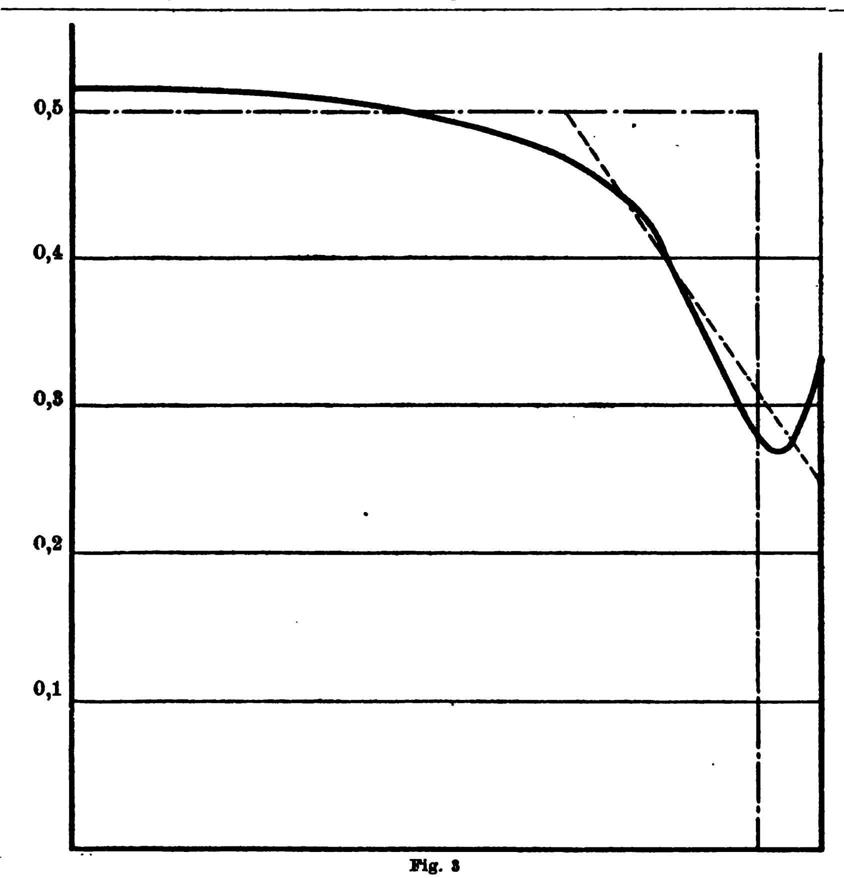


Fig. 3

zeigt die Auftriebsverteilung über die Spannweite eines Flügels vom Seitenverhältnis $\frac{1}{5,8}$ nach englischen Messungen (Lit. 42). Danach kann man in erster Näherung (— · —) annehmen, daß der Auftrieb unveränderlich ist und nur ein Stück in der Breite von ein Viertel der Tragflügeltiefe, vom Rande aus gerechnet, nicht trägt. In zweiter Näherung (— — — —), die sich schon recht gut an die Funktion anschließt, ist, neben einem unveränderlichen Betrag in der Mitte, lineare Abnahme nach dem Rande auf die Hälfte dieses Betrags längs des Bruchteils $\frac{t}{b}$ der Spannweite angenommen.

wirbel sind gleich stark und die zur Wirbelseele senkrechte Geschwindigkeit beträgt im Abstand r von der Wirbelseele nach der Theorie des Auftriebs $\frac{\eta t \cdot v}{2 \pi r}$. Gegenüber der Fluggeschwindigkeit wird also die Strömungsgeschwindigkeit im Abstand $+ y$ über bzw. $- y$ unter dem Tragflügel um einen Bruchteil $\frac{\eta t}{2 \pi y}$ gesteigert bzw. vermindert und im Abstand $+ x$ hinter bzw. $- x$ vor der Wirbelseele des Tragwinkels um den Winkel $\frac{\eta t}{2 \pi x}$ oder im Abstand z nach innen bzw. außen von jedem der Randwirbel

um den Winkel $\frac{\eta t}{2\pi s}$ nach unten bzw. oben abgelenkt. Die Randwirbel lenken also schon für den Tragflügel selbst die Strömungsrichtung gegenüber der Flugrichtung nach unten ab. Dadurch neigt sich die Resultierende des Auftriebs nach hinten, d. h. der Auftrieb, der immer senkrecht zur Strömungsrichtung steht, erhält eine Komponente entgegen der Flugrichtung. Diese Ablenkung der Strömung ist natürlich um so stärker, je größer die

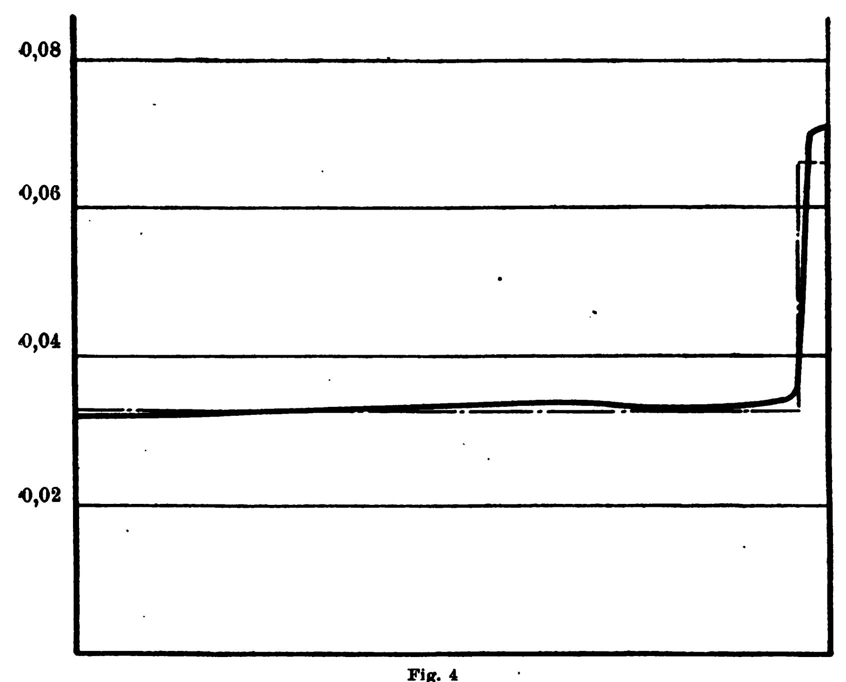


Fig. 4
zeigt die Verteilung des Widerstandes über die Spannweite für ein Seitenverhältnis 1 : 5,8 nach englischen Messungen (Lit. 42). In erster Näherung kann man annehmen, daß der Widerstand unveränderlich ist und nur in dem sehr schmalen Bereich von einem Fünfzigstel der Spannweite am Rande etwa das doppelte beträgt.

Geschwindigkeit des Wirbels ist, und da diese theoretisch am Rande des Tragflügels unendlich groß ist, muß der Widerstand von der Mitte aus, wo er einen kleinsten Betrag annimmt, nach dem Rande zu stark zunehmen. Andrerseits nimmt eben der Auftrieb nach dem Rande zu ab, und dadurch wird die Verteilung des Widerstandes über die Spannweite stark modifiziert. Immerhin tritt, wie Fig. 4 zeigt, eine ganz beträchtliche Steigerung des Widerstandes in schmalem Bereich am Rande ein, auf deren Bedeutung für die Seitensteuerung und -stabilität wir später zurückkommen werden. Trotzdem dürfen wir eben wegen der geringen Breite der Stufe ohne weiteres mit Prandtl für die Ablenkung der Strö-

mung gegenüber der Flugrichtung als Mittelwert ihren Wert in der Mitte der Tragfläche gelten lassen.

$$\Delta\alpha = 2\frac{\eta t}{\pi \cdot b} \tag{17}$$

und die Drehung der Auftriebskraft um diesen kleinen Winkel liefert einen selbstinduzierten Widerstand

$$X = Y \cdot \Delta\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \eta^2 t^2 \cdot \varrho \cdot v^2 \text{ kg}. \tag{18}$$

Dieser Widerstand wächst noch, wenn sich andere Tragflügel in der Nachbarschaft befinden und die Strömung noch weiter ablenken. Für die obere Fläche eines Doppeldeckers beträgt diese zusätzliche Ablenkung der Strömung durch die untere im Bogenmaß:

$$\Delta\alpha_{12} = \bar{\nu}_{12}\frac{\eta_2 t_2}{2\pi b_1} \tag{19}$$

und umgekehrt: für die untere durch die obere:

$$\Delta\alpha_{21} = \bar{\nu}_{21} \cdot \frac{\eta_1 t_1}{2\pi b_2}. \tag{20}$$

Die „Einflußzahl" ν ist eine Funktion der Lage der Flügel zueinander und der Spannweiten. Unter der Voraussetzung, daß die Randwirbel senkrecht zum tragenden Wirbel stehen, hat Betz diese Funktion angegeben (Lit. 9). Ragt einer der beiden tragenden Wirbel auf jeder Seite um c m über den anderen vor, und liegt die Wirbelseele des oberen a m vor und d m über der des unteren (bezogen auf die Flugrichtung), so lassen sich die Betzschen Formeln schreiben in der Form:

$$\bar{\nu}_{12} = \ln\frac{\sqrt{a^2+b^2+d^2}+a}{\sqrt{a^2+c^2+d^2}+a} - \frac{a}{a^2+d^2}\left(\sqrt{a^2+b^2+d^2} - \sqrt{a^2+c^2+d^2}\right) \tag{21}$$

$$\bar{\nu}_{21} = \ln\frac{\sqrt{a^2+b^2+d^2}-a}{\sqrt{a^2+c^2+d^2}-a} + \frac{a}{a^2+d^2}\left(\sqrt{a^2+b^2+d^2} - \sqrt{a^2+c^2+d^2}\right). \tag{22}$$

Strömungstheoretisch ergibt sich hierfür als Lage der Wirbelseele gegenüber dem Profil der Schnittpunkt der resultierenden Luftkraft mit der Flügelsehne (Lit. 19), dessen Abstand von der Hinterkante des Flügels sich in Bruchteilen der Flügeltiefe aus der Division der Auftriebszahl in die Momentenzahl ermitteln läßt. Die Staffelung im ärodynamischen Sinne, d. h. der Abstand der Wirbelseelen gemessen in der Flugrichtung, ändert sich also bei ungleichen Flügeltiefen sowohl in bezug auf die Flügel selbst als auch durch die Lagenänderung der Flügel gegenüber der Flugrichtung durch die mit Änderungen des meßbaren Anstellwinkels verbundene Drehung der Zelle. Ärodynamisch läßt sich also überhaupt keine eindeutige Definition der Staffelung geben. Eine solche können wir jedoch aus einer statisch konstruktiven Betrachtung der Zelle ableiten.

Statisch vorteilhaft ist es natürlich, wenn die druckfesten Stäbe, die der Sicherung des Abstandes der Flügel dienen (Streben, Stiele), die Luftkräfte möglichst ohne Zutun der ihre gegenseitige Lage sichernden Diagonalverspannungen (Tiefenkreuze) aufnehmen, d. h. wenn sie in Richtung der Luftkräfte liegen. Und da der Strömungsdruck bis auf ganz geringfügige Reibungskräfte normal zur Flächenbespannung steht, wird ihre Resultierende wesentlich normal zur Flügelsehne wirken. Man wird also günstige, statische Verhältnisse erhalten, wenn bei gleichen Flügeltiefen die Streben normal zur Flügelsehne liegen, bei ungleichen die Strebenrichtungen sich auf der Normalen zur Flügelsehne schneiden, die der Lage der Luftkräfte entspricht. Da nun für normale Flugzustände die Luftkräfte nicht erheblich vor der Flügelmitte angreifen, hat man, um die Staffelung einfach und eindeutig zu definieren, etwa nur den Betrag anzugeben, um den die Mitte des Oberflügels in Richtung der Flügelsehne gegenüber der Mitte des Unterflügels nach vorn verschoben ist. Damit läßt sich dann auch leicht der Betrag a der ärodynamischen Staffelung für jeden Wert des meßbaren Anstellwinkels und der zugeordneten Auftriebszahlen angeben.

Die den zusätzlichen Ablenkungen entsprechenden „induzierten" Widerstände betragen für das Oberdeck:

$$Y_1 \cdot \varDelta \alpha_{12} = \frac{\bar{\nu}_{12}}{2\pi} \cdot \eta_1 t_1 \, \eta_2 t_2 \cdot \varrho \cdot v^2 \ \text{kg} \tag{23}$$

und für das Unterdeck:

$$Y_2 \cdot \varDelta \alpha_{21} = \frac{\bar{\nu}_{21}}{2\pi} \cdot \eta_1 t_1 \, \eta_2 t_2 \cdot \varrho \cdot v^2 \ \text{kg} \tag{24}$$

und die Summe beider Komponenten, die mit Einführung des (von der Folge der Indizes unabhängigen) Mittelwertes der Einflußzahlen:

$$\nu_{12} = \frac{\bar{\nu}_{12} + \bar{\nu}_{21}}{2} = \ln \sqrt{\frac{b^2 + d^2}{c^2 + d^2}} \text{ [1)]} \tag{25}$$

sich ergibt zu:

$$\frac{\nu_{12}}{\pi} \cdot \eta_1 t_1 \cdot \eta_2 t_2 \cdot \varrho \cdot v^2 \ \text{kg} \tag{26}$$

zeigt sich damit unabhängig vom Grad der Staffelung der Zelle. Der gesamte induzierte Widerstand, den wir unter Ausschluß des gemeinsamen Faktors $\varrho \cdot v^2$ (doppelter Staudruck), mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen, ergibt sich z. B. für einen Vierdecker zu:

---

1) Da für Selbstinduktion nach Gleichung (17) $\nu = \nu_{max} = 4$ und nach Gl. (25), falls c verschwindet, $\nu \cong \ln \frac{b}{d}$ ist, erkennen wir in

$$b_{max} = e^{\nu \, max} \cdot d = 54 \, d$$

die rechnerische Gültigkeitsgrenze der Betzschen Formeln

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{\pi}[2(\eta_1^2 t_1^2 + \eta_2^2 t_2^2 + \eta_3^2 t_3^2 + \eta_4^2 t_4^2) + \nu_{12}\eta_1 t_1\,\eta_2 t_2 + \nu_{23}\eta_2 t_2\,\eta_3 t_3$$
$$+ \nu_{34}\eta_3 t_3\,\eta_4 t_4 + \nu_{13}\eta_1 t_1\,\eta_3 t_3 + \nu_{24}\eta_2 t_2\,\eta_4 t_4 + \nu_{14}\eta_1 t_1\,\eta_4 t_4]. \quad (27)$$

Hierin sind nun keineswegs die η einzuführen, wie man sie etwa aus den Anstellwinkeln gegenüber der Flugrichtung berechnen könnte. Denn infolge der Induktion sind die wirksamen Anstellwinkel um $\Delta\alpha$ kleiner. Für den Vieldecker gilt:

$$\Delta\alpha_1 = \frac{1}{2\pi b_1}(\nu_{11}\eta_1 t_1 + \bar{\nu}_{12}\eta_2 t_2 + \bar{\nu}_{13}\eta_3 t_3 \cdots) \quad (28)$$

$$\Delta\alpha_2 = \frac{1}{2\pi b_2}(\nu_{22}\eta_2 t_2 + \bar{\nu}_{21}\eta_1 t_1 + \nu_{23}\eta_3 t_3 \cdots). \quad (29)$$

Das erste Glied der Klammer rührt von der Selbstinduktion des Tragflügels selbst, die weiteren von der Beeinflussung durch die benachbarten Flügel her. Die Auftriebszahl bei endlicher Breite η unterscheidet sich also von der Auftriebszahl bei unendlicher Breite η_∞ um einen Betrag, der diesem Winkel und der Ableitung η' der Auftriebszahl nach dem Anstellwinkel bei endlicher Breite proportional ist.

$$\eta_1 = \eta_\infty - \eta_1' \cdot \Delta\alpha_1. \quad (30)$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach dem Anstellwinkel liefert:

$$\eta_1' = \eta'_\infty - \eta_1'\Delta'\alpha_1 = \eta'_\infty - \eta_1' \cdot \frac{1}{2\pi b_1}(\nu_{11} \cdot \eta_1' t_1 + \nu_{12}\eta_2' t_2 + \nu_{13}\eta_3' t_3 \cdots) \quad (31)$$

also im Besonderen für den Eindecker:

$$\eta_1'^2 \frac{\nu_{11}}{2\pi} \cdot \frac{t_1}{b_1} + \eta_1' - \eta'_\infty = 0 \quad (32)$$

und da nach Gleichung (14) die Änderung der Auftriebszahl mit dem Anstellwinkel bei unendlicher Breite gleich der Zahl π ist, erhalten wir für:

$$\eta' = \pi \cdot \frac{\sqrt{1 + 2\nu_{11}\, t/b} - 1}{\nu_{11} \cdot t/b} \quad (33)$$

$\nu_{11} \cdot t/b$	4	2	1	$1/2$	$1/4$
η'	1,57	1,94	2,29	2,58	2,80.

Vergleicht man diese Werte mit Messungsergebnissen, so folgt daraus für die Einflußzahl der Selbstinduktion $\nu_{11} \cong 8$, d. h. etwa der doppelte Wert, als wir ihn für die Berechnung des selbstinduzierten Widerstandes nach Gleichung (17) eingesetzt haben. Das bedeutet von vornherein keinen bedenklichen Widerspruch; denn wir haben ja schon früher darauf hingewiesen, daß die Einführung des Wertes der Flügelmitte als Mittelwert für den induzierten Widerstand an sich durchaus willkürlich ist und sich nur durch die gute Übereinstimmung der Formeln mit Messungsergebnissen rechtfertigen läßt. Zur Berechnung des induzierten Widerstandes

benutzten wir aber das Produkt von Auftrieb und Ablenkungswinkel, der ja eben selbst wieder dem Auftrieb proportional ist. Für die Berechnung der Ableitung der Auftriebszahl kam deren Produkt mit dem Ablenkungswinkel in Rechnung, und so erscheint aus der erheblichen Abweichung der örtlichen Werte von den Mittelwerten durchaus verständlich, daß die Einflußzahlen, die ja auch Mittelwerte darstellen, in beiden Fällen durchaus verschieden sind. Erklärt man daher für das vorliegende Problem die Einflußzahl $\nu_{ii} = 8$ in Geltung, so ergeben sich die in Fig. 5 dargestellten Werte η', die bis auf geringfügige Abweichungen der einzelnen Profile voneinander nach allen vorliegenden Messungsergebnissen bei Auftriebszahlen zwischen 0,25 und 0,5 recht gut zutreffen. Bei kleineren Auftriebszahlen sind die Werte etwas größer. Hier macht sich peinlich geltend, daß die Abhängigkeit von der Auftriebszahl selbst, die sich in der diagrammatischen Darstellung der Auftriebszahl in Abhängigkeit vom Anstellwinkel durch eine schwache, mit dem Anstellwinkel wachsende Krümmung kund gibt, von der Strömungstheorie vorläufig gar nicht erfaßt wird; daß man also für ihre Feststellung ausschließlich auf Messungsergebnisse angewiesen ist. In noch höherem Maße ist dies der Fall bei den mittleren Werten η' für Doppeldecker, deren Berechnung nach Gleichung (31) erheblich größere Werte gibt, als bei Messungen im Windtunnel festgestellt wurden, zumal wenn man die Angabe auch hier auf den Bereich von $0{,}25 < \eta < 0{,}50$ beschränkt, für den ja gerade beim Mehrdecker infolge der Induktion erheblich größere Anstellwinkel in Frage kommen. Die Rechnung ergibt unter der Voraussetzung, daß die Ableitung der Auftriebszahl für alle Decken eines Mehrdeckers mit gleichen Flügeltiefen durch die Induktion auf den gleichen Betrag herabgesetzt wird, daß dieser Betrag gleich dem Wert η' für einen Eindecker von einem im Verhältnis

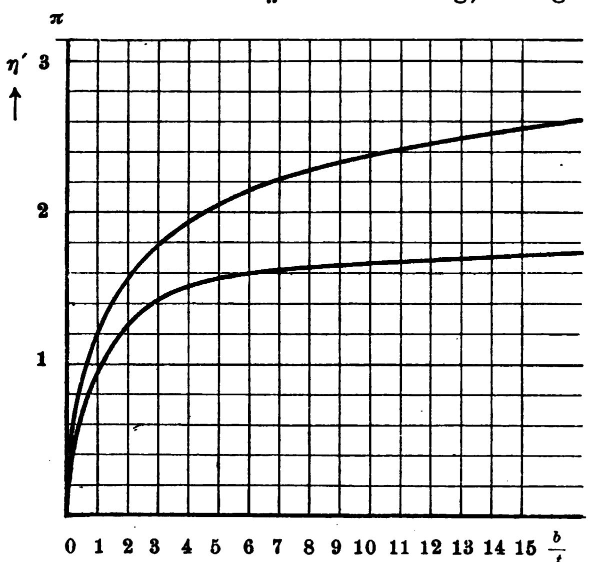


Fig. 5.
Mittlere Werte der Ableitung der Auftriebszahl nach dem Anstellwinkel für Eindecker (oben) und Zweidecker (unten).

$$\frac{v_{11}}{v_{11} + v_{12} + v_{13} \cdots} \tag{34}$$

geringeren Seitenverhältnis ist, während Messungen Munks an Doppeldeckern mit veränderter Spannweite (ohne Staffelung; Deckenabstand gleich Flügeltiefe) die erheblich kleineren, in Fig. 5 durch die untere Kurve dargestellten Werte ergeben haben (Lit. 29).

Doch nicht allein in der Richtung, sondern auch nach der Größe beeinflussen sich benachbarte Strömungen. Es ist ohne weiteres klar, daß ein Tragwirbel für ein darüber liegendes Tragdeck die Strömungsgeschwindigkeit erhöht

$$\frac{\Delta v_1}{v} = \mu_{12} \frac{\eta_2 t_2}{2 \pi b_1}, \tag{35}$$

und umgekehrt die Zirkulation um das obere Tragdeck die Luftgeschwindigkeit für das untere herabsetzt

$$\frac{\Delta v_2}{v} = \mu_{21} \frac{\eta_1 t_1}{2 \pi b_2}. \tag{36}$$

Die Einflußzahlen μ sind wieder Funktion der Lage der Flügel zueinander und ihrer Spannweiten und betragen nach Betz:

$$\mu_{12} = -\mu_{21} = \frac{d}{a^2 + d_2}\left(\sqrt{a^2 + b^2 + d^2} - \sqrt{a^2 + c^2 + d^2}\right). \tag{37}$$

Da v nach wie vor in der Formel für den Auftrieb die Fluggeschwindigkeit und nicht die Strömungsgeschwindigkeit bedeutet, haben wir den Quotienten der Quadrate beider

$$\left(1 + 2\frac{\Delta v_i}{v}\right) \tag{38}$$

als Faktor in die Auftriebszahl einzubeziehen. Diese neuen und endgültigen Auftriebszahlen sollen arabische Zahlen als Index erhalten zur Unterscheidung von den ursprünglichen, lediglich durch die Lage des Profils gegenüber der Strömungsrichtung bestimmten Auftriebszahlen, die als Index römische Zahlen führen. Die Beziehung zwischen beiden ergibt sich z. B. für einen Vierdecker zu:

$$\frac{\eta_I}{\eta_1} = 1 - \frac{1}{\pi b_1}\left(\mu_{12}\eta_2 t_2 + \mu_{13}\eta_3 t_3 + \mu_{14}\eta_4 t_4\right) \tag{39}$$

$$\frac{\eta_{II}}{\eta_2} = 1 - \frac{1}{\pi b_2}\left(-\mu_{12}\eta_1 t_1 + \mu_{23}\eta_3 t_3 + \mu_{24}\eta_4 t_4\right) \text{ usf.} \tag{40}$$

Indem man die erste Gleichung mit $\eta_1 b_1 t_1$, die zweite mit $\eta_2 b_2 t_2$ usf. multipliziert und addiert, kann man sich leicht überzeugen, daß man zur Berechnung des Gesamtauftriebs der Zelle

(41) $\quad Y = \mathfrak{Y}\,\varrho \cdot v^2$ kg $\qquad \mathfrak{Y} = \Sigma \eta_i b_i t_i$ m² $\quad$ (42)

ebensogut die angenommenen Werte $\eta_I \eta_{II} \eta_{III}$ oder die endgültigen Werte $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ verwenden kann.

C. Eine Näherungsformel für den induzierten Widerstand.

Es hängt mit dieser eigentümlichen gegenseitigen Beeinflussung der Auftriebszahlen zusammen, daß sich für den induzierten Widerstand eines n-Deckers eine recht gute Näherung mit:

$$(\mathfrak{J}) = \frac{\eta^2 t^2}{\pi}\,[2n + \nu(n-1) + \nu'(n-2) + \nu''(n-3)\cdots] \tag{43}$$

angeben läßt, die lediglich zum vorläufigen Vergleich der Mehrdecker untereinander zu dienen hat, nicht etwa als Anweisung zur Berechnung des Widerstands, der ausschließlich nach Formel (27) zu berechnen ist. ν bedeutet die Einflußzahl für direkt benachbarteFlächen, ν' für den doppelten Abstand, ν'' für den dreifachen Abstand usf. Nun ist näherungsweise

$$(44)\qquad \nu = \ln\frac{b}{d} - \ln\sqrt{1+\left(\frac{c}{d}\right)^2} \quad \text{und damit:} \quad \begin{matrix} \nu' = \nu - \ln 2 \\ \nu'' = \nu - \ln 3 \end{matrix} \qquad (45)$$

Durch Einführung der konstruktiv gegebenen Bauhöhe h der Zelle statt des mit der Deckenzahl n veränderlichen Abstandes d benachbarter Flächen

$$h = (n-1)\cdot d \tag{46}$$

erhalten wir eine neue lediglich von Bauhöhe und Spannweite abhängige Einflußzahl

$$\nu_0 = \nu - \ln(n-1). \tag{47}$$

Der Mittelwert ηt in der Näherungsformel für $(\mathfrak{J})$ steht mit dem Mittelwert der Spannweiten b und dem Auftrieb in der Beziehung

$$(48)\qquad \mathfrak{Y} = n\cdot\eta t\cdot b \quad \text{damit wird} \quad (\mathfrak{J}) = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\mathfrak{Y}}{b}\right)^2\cdot \mathfrak{r} \qquad (49)$$

$$\text{worin:}\quad \mathfrak{r} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{4n}[\nu_0 + \ln(n-1)] - \frac{1}{2n}[\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n-1)] + \frac{1}{2n^2}[2\ln 2 + 3\ln 3\cdots + (n-1)\ln(n-1)]. \tag{50}$$

Die Formel liefert für den

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Eindecker}: & \mathfrak{r} = 1 \\ \text{Zweidecker}: & = 0{,}500 + 0{,}125\,\nu_0 \\ \text{Dreidecker}: & = 0{,}400 + 0{,}160\,\nu_0 \\ \text{Vierdecker}: & = 0{,}375 + 0{,}187\,\nu_0 \\ \text{Fünfdecker}: & = 0{,}364 + 0{,}200\,\nu_0 \end{array}\right\}.$$

Fig. 6 zeigt die Geraden $\mathfrak{r} = f(\nu_0)$. Es zeigt sich, daß bei gegebenen Werten für Auftrieb und Spannweiten bei

$$1 < \nu_0 < 2{,}8 \tag{51}$$

der Dreidecker geringsten induzierten Widerstand hat, für kleinere Werte von ν_0 der Fünfdecker, für größere der Zweidecker, und daß dieser erst

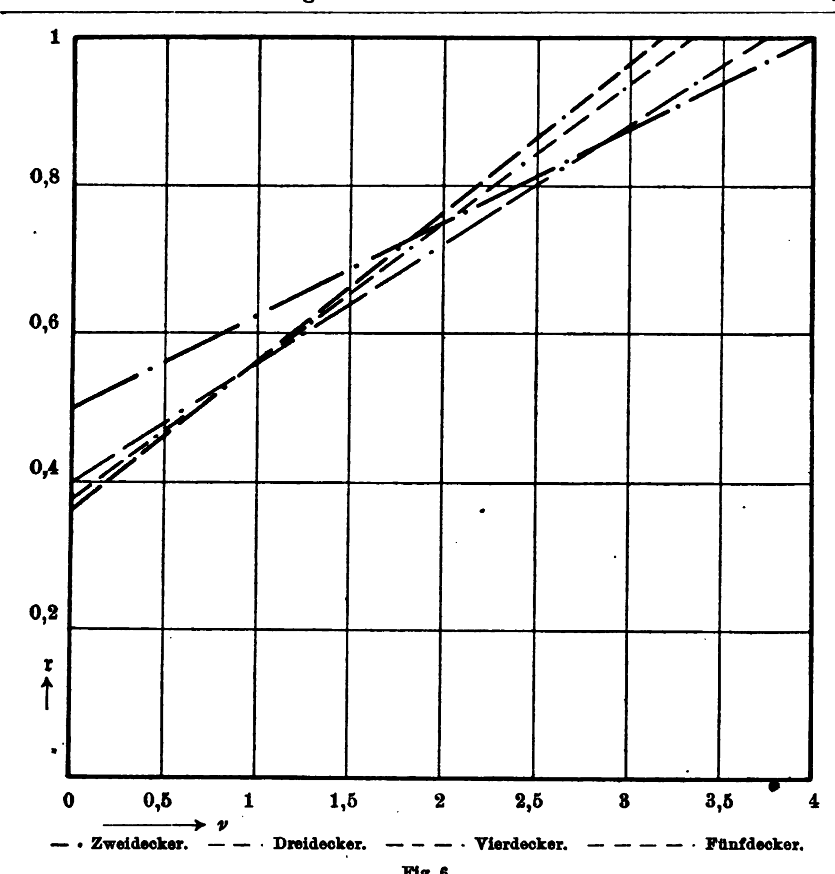


Fig. 6.
Der induzierte Widerstand von Mehrdeckern bei gegebener Spannweite, Bauhöhe und Tragfähigkeit im Verhältnis zum induzierten Widerstand eines Eindeckers.

für $\nu_0 = 4$[1]) ebenso ungünstig wie der Eindecker ist. Bei 0° bzw. 45° seitlicher Staffelung ist also der Dreidecker am vorteilhaftesten, wenn die verfügbare Spannweite 3 bis 12 bzw. 4 bis 17mal so groß wie die verfügbare Zellenhöhe ist. Ist die zulässige Breite des Flugzeugs noch kleiner, so ist der Vierdecker zu bevorzugen, ja, wenn konstruktiv gleich günstig, der Fünfdecker; ist sie ausnahmsweise größer, so ist der Zweidecker im Vorteil. Für $b/h = 7$ bzw. 10 ($\nu_0 = 2$) sind Zweidecker und Vieldecker nahezu gleichwertig und dem Dreidecker nur wenig unterlegen. Jedenfalls sollte man, soweit nicht andere Gründe den Ausschlag geben, bei wesentlich größeren Spannweiten das Flugzeug nicht als Vieldecker, bei wesentlich kleineren Spannweiten nicht als Zweidecker ausführen.

1) Vgl. Anmerkung zu Gl. (25).

Denn wenn auch die Darstellung infolge ihrer nur angenähert richtigen Voraussetzungen nicht vollkommen zutrifft, so sind die quantitativen Abweichungen doch zweifellos so geringfügig, daß auch kleine Unterschiede, wie sie die konstruktive Durchführung für verschiedene Deckenzahl mit sich bringt, erheblichere Abweichungen vom berechneten angenäherten Kleinstwert des induzierten Widerstandes nicht ausgleichen können. Denn immer ist im Auge zu behalten, daß der Gesamtwiderstand außer dem von Bau und Lage abhängigen induzierten Widerstand, der bei verschwindendem Auftrieb auch verschwindet, noch den Stirnwiderstand umfaßt, der als unabhängig von der nur innerhalb enger Grenzen veränderlichen Lage des Flugzeugs betrachtet werden kann.

D. Die Berechnung des Stirnwiderstandes.

Der „Stirnwiderstand“ ist gleich der Summe aller Widerstände der dem Luftstrom ausgesetzten Bauteile des Flugzeugs, und diese Einzelwiderstände sind jeweils nur abhängig vom Querschnittsverlauf des Körpers in der Flugrichtung und wachsen mit dem Quadrat seiner linearen Dimensionen. Die Abhängigkeit vom Querschnitt wird quantitativ angegeben durch eine dem Querschnitt eigene Widerstandszahl. Die Abhängigkeit von den absoluten Größen hat man sich gewöhnt, für nichttragende Bauteile auf die Aufrißprojektion Q und für die Flügel auf die Grundrißprojektion $b_i t_i$ zu beziehen. Nicht allein wegen dieser verschiedenen Definitionen der Widerstandszahlen wollen wir weiterhin dementsprechend beim „Stirnwiderstand“ zwischen „schädlichem Widerstand $\mathfrak{S}$“ und „Profilwiderstand $\mathfrak{P}$“ unterscheiden, sondern vor allem, weil gerade die Ermittelung der Flügelgröße das erste Ziel der ganzen Rechnung und somit zunächst eine Unbekannte ist, während der „schädliche Widerstand“ sich von vornherein ziemlich genau, unabhängig von der Art des Zellenaufbaues und den Flügelgrößen, angeben läßt. Beide Widerstände umfassen neben einem eigentlichen Formwiderstand, den man durch günstige Querschnittsgestaltung („Tropfen“) herabzusetzen sucht, den Reibungswiderstand, der mit der Größe der Oberfläche wächst. Da jedoch für einen gegebenen Querschnitt die Körperoberfläche proportional der Aufriß- bzw. Grundrißprojektion des Körpers ist, kann man Formwiderstand und Reibungswiderstand mit einer Widerstandszahl zusammenfassen und schreiben:

$$X = \varrho v^2 \mathfrak{X} \qquad (52) \qquad\qquad \mathfrak{X} = \mathfrak{S} + \mathfrak{P} + \mathfrak{J} \qquad (53)$$

$$\mathfrak{S} = \Sigma \xi \cdot Q \qquad (54) \qquad\qquad \mathfrak{P} = \Sigma \psi_i b_i t_i \qquad (55)$$

Freilich sind hierin, eben wegen der inneren Reibung (Zähigkeit), die den Reibungswiderstand verursacht und den Formwiderstand veranlaßt (Lit. 4), die Widerstandszahlen ξ und ψ Funktion der Reynoldsschen

Zahl[1]) und zwar meist in der Weise, daß ξ bzw. ψ beim Überschreiten einer bestimmten Reynoldsschen Zahl von einem nahezu unveränderlichen Wert plötzlich stark abfällt und nach diesem Sprung wieder einen nahezu unveränderlichen aber wesentlich kleineren Wert innehält. Da die Reynoldssche Zahl zugleich mit der Luftdichte und der Geschwindigkeit sinkt, läuft man also Gefahr, mit zunehmender Höhe jenes Gebiet höherer Widerstandszahlen zu erreichen. Man hat daher zur Ermittelung der Widerstandszahlen auch die Reynoldssche Zahl für jene Höhe zu berechnen, für die die Flugzeugberechnung durchgeführt wird. Die so ermittelten Werte ξ bedürfen indes noch einer Korrektur für Bauelemente, die im Strahl der Luftschraube liegen. Wir werden diese Korrektur gelegentlich der Berechnung der Stärke des Schraubenwindes geben (III G).

II. Die Berechnung der Flügeltiefen und Anstellwinkel.

A. Die Konstruktionsrichtungen.

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt gesehen, in welch verwickelter Abhängigkeit der Widerstand von Abmessungen und Anstellwinkel des Flugzeugs steht. Wir haben nun zu zeigen, mit welchen Abmessungen und Anstellwinkeln man den der Aufgabe entsprechenden Kleinstwert des Widerstandes erreicht. Wir sahen, daß der selbstinduzierte Widerstand mit Vergrößerung der Spannweite, und der induzierte Widerstand mit Vergrößerung des Flächenabstandes abnimmt, und man wird, so weit dies mit der Holmfestigkeit verträglich und konstruktiv durchführbar ist, daher die Flügelbreiten und die Bauhöhe der Zelle so groß als irgend möglich machen. Wir haben also lediglich die Flügeltiefen und die Anstellwinkel bzw. Auftriebszahlen für jeden Flügel zu berechnen.

Gewöhnlich werden dem Konstrukteur jeweils nur wenige Motortypen zur Verfügung stehen, von denen er leicht denjenigen wird bestimmen können, der der Aufgabe am meisten entspricht. Man muß also von vornherein mit einer bestimmten Leistung und einer bestimmten Leistungsabnahme mit der Höhe rechnen. Schaltet man danach von vornherein die Aufgabe aus, ein Flugzeug mit minimalem Leistungsanspruch zu bauen, so hat man weiterhin nur noch vier Konstruktionsrichtungen zu unterscheiden, die für die Bemessung der Flügeltiefen und Anstellwinkel ausschlaggebend sein können. Es werden Größtwerte gefordert entweder für

1) Die Reynoldssche Zahl wird definiert als Produkt von Geschwindigkeit, linearer Dimension des Körpers und Dichte der Flüssigkeit im Verhältnis zur Zähigkeit. Hütte, 22. Aufl., I. S. 348.

I. die Geschwindigkeit v beim Flug in H km Höhe
oder II. die Last P beim Flug in H km Höhe
oder III. die erreichbare Größthöhe H_g (Gipfelhöhe)
oder IV. die Steiggeschwindigkeit bis zu H km Höhe

und es sind nunmehr die Bedingungen abzuleiten, unter denen solche eintreten. Wir haben also die Gleichungen für die Geschwindigkeit v, die Last P, die Gipfelhöhe H_g und für die mittlere Steiggeschwindigkeit w_H zwischen O und H km-Höhe anzusetzen und nach den Flügeltiefen t_i und Auftriebszahlen η_i abzuleiten. Werden diese Ableitungen gleich Null gesetzt, so ergeben sie Gleichungen für die t_i und η_i, die Größtwerte für v, P, H_g, w_H liefern. Wir bezeichnen die partielle Ableitung einer Funktion nach den Argumenten $a = t_i$ bzw. $a = \eta_i$ mit Index a. Ferner sei:

G kg das Gesamtgewicht,
P kg die „Last", d. h. Gesamtgewicht abzüglich Flügelgewicht,
q kg m das Einheitsgewicht der Flügel,
L kg m sk^{-1} die Nutzleistung des Vortriebs in H-km Höhe,
ϱ kg m^{-4} sk^2 die Luftdichte in H-km Höhe,
v m sk^{-1} bzw. V km/st die Flugzeuggeschwindigkeit,
w m sk^{-1} die Steiggeschwindigkeit,
N PS die effektive Leistung des Motors,
η_s der Wirkungsgrad der Luftschraube.

Dann gilt als „Schwebebedingung", wenn wir für übliche Flugzustände den Kosinus des Winkels zwischen Flugrichtung und Horizontaler der Einheit gleich setzen:

$$G - \mathfrak{Y} \cdot \varrho \cdot v^2 = 0 \tag{56}$$

und als „Leistungsbedingung"

$$L - \mathfrak{X} \cdot \varrho \cdot v^3 = G \cdot w\,^{1)}, \tag{57}$$

(58) wobei $L = 75 \cdot \eta_s \cdot N$ und $G = P + \Sigma q_i b_i t_i$. (59)

Beide Bedingungen lassen sich durch Elimination von v zu einer dritten vereinigen:

$$L - \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}^{-\frac{3}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{3}{2}} = G \cdot w, \tag{60}$$

die, soweit nicht eben v selbst gewertet wird, z. B. Berechnung von Trag- und Steigfähigkeit, ausreicht. Ersichtlich nimmt die Steiggeschwindigkeit w aus doppelter Ursache mit der Höhe ab: Die Nutzleistung L des Propellers fällt mit der Motorleistung, die wesentlich mit der Luftdichte sinkt, und das negative Glied steigt mit $1/\sqrt{\varrho}$, selbst wenn der mit einem gegebenen Flugzeug erreichbare Kleinstwert für $\mathfrak{X}^2/\mathfrak{Y}^3$ unverändert beibehalten wird. Denn dieser Kleinstwert entspricht einem bestimmten Anstellwinkel, und bei einem gegebenen Anstellwinkel fordert die Schwebebedingung mit abnehmender Luftdichte zunehmende Geschwindigkeit:

1) $w = 0$ bzw. $L = 0$ bedeuten Horizontal- bzw. Gleitflug $\left(\frac{w}{v} = -\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}}\right)$.

$$v = \varrho^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathfrak{Y}^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}. \tag{61}$$

Damit steigt der Leistungsaufwand zur Überwindung des Widerstandes, und die zur Hubarbeit noch verfügbare Leistung sinkt.

Um in gegebener Höhe größte Tragfähigkeit oder mit gegebener Last größte Höhe bzw. kürzeste Steigzeiten zu erreichen, hätte der Konstrukteur danach vor allem für einen möglichst geringen Kleinstwert von $\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}$ zu sorgen. Daneben ist es jedoch erforderlich, auch das Gewicht der Flügel, das einen nicht unbedeutenden Bruchteil des Gesamtgewichts ($\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{5}$) ausmacht, möglichst klein zu halten. Der Kleinstwert für $\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}$ fordert großes $\mathfrak{Y}$ und damit große Flügel; der Kleinstwert für G geringes Flügelgewicht und damit kleine Flügel. Der Kompromiß beider Forderungen lautet je nach ihrer jeweiligen Bedeutung für die Fälle I—IV verschieden.

B. Die Bedingungen zur Erreichung größter Flugleistungen.

Fall I. Die größte Geschwindigkeit wird natürlich dann erreicht, wenn die gesamte Nutzleistung zur Überwindung des Widerstandes aufgewendet werden kann, also die Steiggeschwindigkeit und damit die Steigleistung

$$L - \varrho^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}^{-\frac{3}{2}} \cdot G^{\frac{3}{2}} = 0 \tag{62}$$

verschwindet. Das Maximum der Geschwindigkeit, welches aus Gleichung (61) zu berechnen wäre, hat also die Gleichung (62) zur Nebenbedingung. Zur Bestimmung eines bestimmten Grenzwertes hat man nicht die Variable allein, sondern eine Funktion, die die Variable und die Nebenbedingung enthält, nach den unabhängig Veränderlichen abzuleiten. Diese neue Funktion entsteht einfach aus der Summation der ursprünglichen Variablen v und der mit einer willkürlichen Konstanten multiplizierten Nebenbedingung.

$$z = v + \frac{w}{\varkappa_{II}} \tag{63}$$

Die Konstante ist später wieder mit Hilfe der Nebenbedingung zu eliminieren. Die Ableitung liefert:

$$z_a = v_a + \frac{w_a}{\varkappa_{II}} \tag{64}$$

$$\frac{\varkappa_I}{2}\left(-\frac{\mathfrak{Y}_a}{\mathfrak{Y}} + \frac{G_a}{G}\right) + \left(\frac{\mathfrak{X}_a}{\mathfrak{X}} - \frac{3}{2}\frac{\mathfrak{Y}_a}{\mathfrak{Y}} + \frac{3}{2}\frac{G_a}{G}\right) = 0. \tag{65}$$

Die Bedingung läßt sich auch schreiben:

$$G(\mathfrak{X}_a \cdot \mathfrak{Y} - \varkappa \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}_a) + \varkappa \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y} \cdot G_a = 0. \tag{66}$$

Fall II. Als Last bezeichnen wir das Gesamtgewicht des Flugzeugs abzüglich des Gewichts der Zelle.

$$P = G - \Sigma q_i b_i t_i. \tag{67}$$

Ihr Betrag folgt aus Gl. (62)

$$P = \varrho^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}} \cdot \mathfrak{X}^{-\frac{2}{3}} \cdot \mathfrak{Y} - \Sigma q_i b_i t_i \tag{68}$$

und erreicht einen Höchstwert für $P_a = 0$, also

$$\varrho^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}} (2 \mathfrak{X}_a \mathfrak{Y} - 3 \mathfrak{X} \mathfrak{Y}_a) + 3 \mathfrak{X}^{\frac{5}{3}} \frac{\delta}{\delta a} \Sigma q_i b_i t_i = 0. \tag{69}$$

Fall III. Die größte Höhe ist erreicht, wenn der Betrag

$$L \cdot \varrho^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}^{-\frac{3}{2}} \cdot G^{\frac{3}{2}} \tag{70}$$

sein Minimum erreicht. Die Ableitung liefert als Bedingung hierfür:

$$\frac{\mathfrak{X}_a}{\mathfrak{X}} - \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{Y}_a}{\mathfrak{Y}} + \frac{3}{2} \frac{G_a}{G} = 0 \tag{71}$$

oder

$$G (2 \mathfrak{X}_a \mathfrak{Y} - 3 \mathfrak{X} \mathfrak{Y}_a) + 3 \mathfrak{X} \mathfrak{Y} G_a = 0. \tag{72}$$

Fall IV. Die Steiggeschwindigkeit ist nach Gl. (34):

$$w = L \cdot G^{-1} - \varrho^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}^{-\frac{3}{2}} G^{\frac{1}{2}} \tag{73}$$

umso größer, je größer die Leistung des Motors und je kleiner die zur Überwindung des Widerstandes erforderliche Leistung ist. Offenbar werden die Steigzeiten umso kleiner sein, je größer der Mittelwert der Steiggeschwindigkeit zwischen Boden und H km Höhe ist (Index H)

$$w_H = L_H \cdot G^{-1} - \left(\varrho^{-\frac{1}{2}}\right)_H \cdot \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}^{-\frac{3}{2}} \cdot G^{\frac{1}{2}}. \tag{74}$$

also für

$$\frac{\delta}{\delta a} w_H = 0 \text{ [1]} \tag{75}$$

$$\frac{1}{D} \frac{G_a}{G} + \frac{\mathfrak{X}_a}{\mathfrak{X}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Y}_a}{\mathfrak{Y}} + \frac{1}{2} \frac{G_a}{G} = 0 \tag{76}$$

$$D \cdot G (2 \mathfrak{X}_a \cdot \mathfrak{Y} - 3 \mathfrak{X} \mathfrak{Y}_a) + (D + 2) \mathfrak{X} \mathfrak{Y} G_a = 0 \tag{77}$$

hierin ist

$$D = \left(\varrho^{-\frac{1}{2}}\right)_H \cdot \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}^{-\frac{3}{2}} \cdot G^{\frac{3}{2}} L_H^{-1}. \tag{78}$$

---

1) Die Ableitung unmittelbar nach der Steigzeit würde, da die Steigzeit nur aus einer Reihenentwickelung gewonnen werden kann (S. 41), eine Erschwerung des Rechenvorgangs mit sich bringen, die durch die Vermeidung der geringen Fehler des hier eingeschlagenen Verfahrens nicht gerechtfertigt werden könnte.

Für einen n-Decker ergeben also in jedem Fall I—IV die Ableitungen nach den Flügeltiefen $t_1 \ldots t_n$ und Auftriebszahlen $\eta_1 \ldots \eta_n$ $2n$ Gleichungen, aus denen die Werte für $t_1 \ldots t_n$ und $\eta_1 \ldots \eta_n$ folgen, die für die Funktionen v, P, H_g, w_H Extremwerte liefern.

C. Die Erfüllung der Bedingungen.

Wir können dabei voraussetzen, daß der schädliche Widerstand $\mathfrak{S}$ wesentlich unabhängig ist von den Flügeltiefen, d. h., daß die Widerstände von Streben und Kabeln nur vom Gesamtgewicht, aber nicht von der Größe der Tragflächen abhängen. Wir dürfen ferner annehmen, daß der Stirnwiderstand $\mathfrak{S} + \mathfrak{P}$ wesentlich unabhängig ist von den Auftriebszahlen, d. h. von der Lage des Flugzeugs gegenüber der Flugrichtung. Dies trifft nun weder für den schädlichen Widerstand, noch für den Profilwiderstand (Fig. 7) genau zu, aber es wäre in keiner Weise zu rechtfertigen diese geringe Variabilität für die Dimensionierung mitbestimmend sein zu lassen. Wir setzen also:

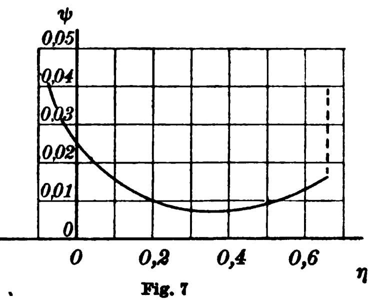


Fig. 7 zeigt die dem in Fig. 2 dargestellten Profil entsprechende Profilwiderstandszahl in Abhängigkeit von den Auftriebszahlen. Die Ordinate ist im zehnfachen Maßstabe der Abzisse dargestellt. Innerhalb des flugtechnisch wichtigen Bereichs der Auftriebszahlen von 0,25 bis 0,5 kann hinreichend genau von einer Unabhängigkeit des Profilwiderstandes vom Anstellwinkel gesprochen werden. Der erreichbare, aber nicht zulässige Größtwert der Auftriebszahl wird durch das plötzliche starke Anwachsen des Profilwiderstandes auf 0,66 festgelegt.

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i}(\mathfrak{S}+\mathfrak{P}) = 0 \text{ bzw. } \frac{\partial}{\partial t_i}(\mathfrak{S}+\mathfrak{P}) = 0. \tag{79}$$

Dann ergibt die Differentiation von

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{S} + \mathfrak{P} + \mathfrak{J} \tag{53}$$

$$\mathfrak{Y} = \Sigma \eta_i b_i t_i \tag{42}$$

$$G = P + \Sigma g_i b_i t_i \tag{67}$$

nach η_i bzw. t_i:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \eta_i} = \frac{t_i}{\pi} \cdot \varphi_i, \qquad \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial \eta_i} = b_i \cdot t_i, \qquad \frac{\partial G}{\partial \eta_i} = 0 \tag{80}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t_i} = \frac{\eta_i}{\pi} \cdot \varphi_i + \psi_i b_i, \qquad \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t_i} = \eta_i \cdot b_i, \qquad \frac{\partial G}{\partial t_i} = g_i b_i. \tag{81}$$

Hierin ist: $\varphi_i = 4\eta_i t_i + \nu_{i\,i\pm1} \cdot \eta_{i\pm1} \cdot t_{i\pm1} + \nu_{i\,i\pm2} \cdot \eta_{i\pm2} \cdot t_{i\pm2} \cdots$ (82)

und unter Einführung dieser Werte in die Gleichungen (66), (69), (72), (77) ergibt sich:

$$\text{I)} \quad \varphi_i \mathfrak{Y} - \varkappa \pi \mathfrak{X} b_i = 0 \tag{83}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{II)}\\ \text{III)}\\ \text{IV)}\end{array}\right\} 2\varphi_i \mathfrak{Y} - 3\pi \mathfrak{X} b_i = 0 \tag{84}$$

$$\text{I)}\ G\left(\eta_i \frac{\varphi_i}{\pi} \mathfrak{Y} + \psi_i b_i \mathfrak{Y} - \varkappa \mathfrak{X} \eta_i b_i\right) + \varkappa \mathfrak{X} \mathfrak{Y} q_i b_i = 0, \tag{85}$$

$$\text{II)}\ \varrho^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}} \left(2\eta_i \cdot \frac{\varphi_i}{\pi} \mathfrak{Y} + 2\mathfrak{Y} \cdot \psi_i \,.\, b_i - 3\mathfrak{X}\eta_i b_i\right) + 3\mathfrak{X}^{\frac{5}{3}} \cdot q_i bi = 0 \tag{86}$$

$$\text{III)}\ G\left(2\eta_i \cdot \frac{\varphi_i}{\pi} \mathfrak{Y} + 2 \cdot \mathfrak{Y}\psi_i \cdot b_i - 3\mathfrak{X}\eta_i b_i\right) + 3\mathfrak{X} y q_i b_i = 0 \tag{87}$$

$$\text{IV)}\ D \cdot G\left(2\eta_i \cdot \frac{\varphi_i}{\pi} \mathfrak{Y} + 2\mathfrak{Y} \cdot \psi_i \cdot b_i - 3\mathfrak{X}\eta_i b_i\right) + (D+2)\mathfrak{X}\mathfrak{Y} \cdot q_i b_i = 0. \tag{88}$$

Wir sehen ohne weiteres, da die einzelnen Faktoren an sich alle notwendig positiv sind, indem wir die Gleichung (83) in (85), und (84) in (86) bis (88) einführen, daß diese nicht miteinander verträglich sind, also die partiellen Maxima sich zu einem absoluten Maximum nicht vereinigen lassen. Wir haben zunächst kurz, um falsche konstruktive Folgerungen auszuschließen, zu diskutieren, in welcher Weise man sich die Flächen V bzw. G bzw. H_g bzw. $w = f(\eta, t)$ in einem dreiachsigen Koordinatensystem vorzustellen hat. Lassen wir vorläufig den nachteiligen Einfluß wachsender Flügeltiefe bei G und $\mathfrak{P}$ außer acht, so kommt η und t ausschließlich im Produkt miteinander vor, und die Funktionen V, G, H_g, w haben einen unveränderlichen Wert für einen bestimmten Wert $\eta \cdot t$. Die Flächen V, G, H_g, w lassen sich also in erster Linie charakterisieren durch einen Höhenzug, der nach Maßgabe der gleichseitigen Hyperbel $\eta \cdot t$ konst. sich im positiven Oktanten an die positiven Achsen η und t schmiegt. Der einseitige Einfluß, den wachsende Flügeltiefe t durch Vergrößerung des Flügelgewichts und des Profilwiderstandes übt, macht sich in der Weise geltend, daß die Kammlinie der eben charakterisierten Fläche mit wachsendem t fällt und mit wachsendem η steigt. Es gibt also tatsächlich kein absolutes Maximum, das sich bei einem bestimmten Wert der Auftriebszahl durch eine bestimmte Flügeltiefe erreichen ließe, sondern das Maximum wächst stetig mit η, und zwar nicht nur das partielle Maximum nach η, das an der betreffenden Stelle durch eine horizontale Tangente normal zur η-Achse gefunden wird, sondern auch das partielle Maximum nach t, das durch eine horizontale Tangente parallel zur η-Achse zu finden wäre. Der erreichbare Höchstwert der Funktionen V, G, H_g, w wird also in jedem Fall gefunden, indem wir den erreichbaren Höchstwert von η einführen in die Gleichungen für das partielle Maximum nach t (85) bis (88). Denn bei η_{max} bricht, um zur räumlichen Vorstellung der Funktion zurückzukehren, der hyperbolisch sich an die Achsen schmiegende, mit η steigende Höhenzug schroff ab, und der Größtwert der Funktionen, in der zur η-Achse normalen Schnittebene $\eta = \eta_{max}$ ist eben bestimmt durch die wagerechte Tangente in dieser Ebene, d. h. ist identisch mit dem partiellen Maximum der Funktionen nach t für $\eta = \eta_{max}$. Wir haben

also lediglich die Bedingungen (85) bis (88) zu erfüllen. Diese liefern mit Gleichung (82) für die n Unbekannten $\eta_i t_i$ beim n-Decker n Gleichungen:

$$\varphi_i = \pi \cdot b_i \left(\mathfrak{A} - \frac{\mathfrak{B} \cdot q_i + \psi_i}{\eta_i} \right) \tag{89}$$

$$\begin{array}{llllll} & \text{Fall: I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \\ \text{worin für: } \mathfrak{A} & \frac{\mathfrak{X} \cdot \varkappa}{\mathfrak{Y}} & \frac{3\mathfrak{X}}{2\mathfrak{Y}} & \frac{3\mathfrak{X}}{2\mathfrak{Y}} & \frac{3\mathfrak{X}}{2\mathfrak{Y}} & (90) \\ \mathfrak{B} & \frac{\mathfrak{X} \cdot \varkappa}{G} & \frac{3\mathfrak{X}^{\frac{5}{2}}}{2\mathfrak{Y}\varrho^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}} & \frac{3\mathfrak{X}}{2G} & \frac{\mathfrak{X}}{2G} + \frac{L_H}{\left(\varrho^{-\frac{1}{2}}\right)_H} \frac{\mathfrak{Y}^{\frac{3}{2}}}{G^{\frac{5}{2}}} & (91) \end{array}$$

zu setzen ist. Wir erhalten nach Gleichung (82) für einen Vierdecker:

$$\left.\begin{array}{l} 4\eta_1 t_1 + \nu_{12} \cdot \eta_2 t_2 + \nu_{13}\eta_3 t_3 + \nu_{14}\eta_4 t_4 = \varphi_1 \\ \nu_{12}\eta_1 t_1 + 4\eta_2 t_2 + \nu_{23}\eta_3 t_3 + \nu_{24}\eta_4 t_4 = \varphi_2 \\ \nu_{13}\eta_1 t_1 + \nu_{23}\eta_2 t_2 + 4\eta_3 t_3 + \nu_{34}\eta_4 t_4 = \varphi_3 \\ \nu_{14}\eta_1 t_1 + \nu_{24}\eta_2 t_2 + \nu_{34}\eta_3 t_3 + 4\eta_4 t_4 = \varphi_4 \end{array}\right\} \tag{92}$$

und daraus schrittweise durch Streichen von t_4, t_3, t_2 die Maximumsbedingungen für den Drei-, Zwei- und Eindecker.

D. Hilfsformeln für die Berechnung.

Wir haben als Mittelwert der Einflußzahlen direkt benachbarter Flächen nach Gleichung (44) und (46)

$$\nu = \ln \frac{b}{h} - \ln \sqrt{1 + \left(\frac{c}{d}\right)^2} + \ln (n-1) \tag{93}$$

Für $x << 1$ ist $\ln(1 \pm x) \approx \pm x$, und indem wir diese Beziehung auf die Abweichung der jeweiligen Mittelwerte der Spannweiten zweier sich beeinflussender Flügel vom Hauptmittelwert

$$b = \frac{\Sigma b_i}{n} \tag{94}$$

anwenden, erhalten wir für stetige seitliche Staffelung die Nennerdeterminanten von Gl. (92) in folgender Form:

Für den Vierdecker:

$$\left| \begin{array}{cccc} 4 & \nu + \frac{2c}{b} & \nu + \frac{c}{b} - \ln 2 & \nu - \ln 3 \\ \nu + 2\frac{c}{b} & 4 & \nu & \nu - \frac{c}{b} - \ln 2 \\ \nu + \frac{c}{b} - \ln 2 & \nu & 4 & \nu - 2\frac{c}{b} \\ \nu - \ln 3 & \nu - \frac{c}{b} - \ln 2 & \nu - \frac{2c}{b} & 4 \end{array} \right| \tag{95}$$

Für den Dreidecker:

$$\begin{vmatrix} 4 & \nu + \frac{c}{b} & \nu - \ln 2 \\ \nu + \frac{c}{b} & 4 & \nu - \frac{c}{b} \\ \nu - \ln 2 & \nu - \frac{c}{b} & 4 \end{vmatrix} \qquad (96)$$

Für den Zweidecker: $$\begin{vmatrix} 4 & \nu \\ \nu & 4 \end{vmatrix} \qquad (97)$$

Die sehr langwierige Ausrechnung der fünf vierzeiligen Determinanten für den Vierdecker kann man sich sparen, wenn man im Hinblick auf die Symmetrie der Gleichungen, nicht nach den $\eta_i t_i$ selbst, sondern nach Hilfsgrößen σ, δ auflöst:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma' = \eta_1 t_1 + \eta_4 t_4 & \sigma'' = \eta_2 t_2 + \eta_3 t_3 \\ \delta' = \eta_1 t_1 - \eta_4 t_4 & \delta'' = \eta_2 t_2 - \eta_3 t_3 \end{array}\right\} \qquad (98)$$

Wir schreiben ferner:

$$\mathfrak{K}' = \varphi_1 + \varphi_4, \quad \mathfrak{K}'' = \varphi_2 + \varphi_3, \quad k' = \varphi_1 - \varphi_4, \quad k'' = \varphi_2 - \varphi_3 \qquad (99)$$

und erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} (4 + \nu - \ln 3)\,\sigma' + (2\nu - \ln 2)\,\sigma'' + \frac{c}{b} \cdot \delta'' = \mathfrak{K}' \\ (2\nu - \ln 2)\,\sigma' + (4 + \nu)\,\sigma'' + \frac{3c}{b} \cdot \delta' = \mathfrak{K}'' \\ (4 - \nu + \ln 3)\,\delta' + \ln 2\,\delta'' + \frac{3c}{b} \cdot \sigma'' = k' \\ \ln 2 \cdot \delta' + (4 - \nu)\,\delta'' + \frac{c}{b} \cdot \sigma' = k'' \end{array}\right\} \qquad (100)$$

Oder indem wir die geringfügigen letzten Glieder der linken Seite auf die rechte schaffen:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma' : \sigma'' : 1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{K}' - \frac{c}{b} \cdot \delta'' & 2\nu - \ln 2 \\ \mathfrak{K}'' - \frac{3c}{b} \cdot \delta' & 4 + \nu \end{vmatrix} \\ \qquad : \begin{vmatrix} 4 + \nu - \ln 3 & \mathfrak{K}' - \frac{c}{b} \cdot \delta'' \\ 2\nu - \ln 2 & \mathfrak{K}'' - \frac{3c}{b} \cdot \delta' \end{vmatrix} \\ \qquad : \begin{vmatrix} 4 + \nu - \ln 3 & 2\nu - \ln 2 \\ 2\nu - \ln 2 & 4 + \nu \end{vmatrix} \end{array}\right\} \qquad (101)$$

$$\delta' : \delta'' : 1 = \begin{vmatrix} k' - \frac{3c}{b}\cdot\sigma'' & \ln 2 \\ k'' - \frac{c}{b}\cdot\sigma' & 4-\nu \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4-\nu+\ln 3 & k' - \frac{3c}{b}\sigma'' \\ \ln 2 & k'' - \frac{c}{b}\sigma' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4-\nu+\ln 3 & \ln 2 \\ \ln 2 & 4-\nu \end{vmatrix} \qquad (102)$$

Man berechnet zuerst σ' und σ'' mit $\delta' = 0$; $\delta'' = 0$ und führt diese Werte in Gleichung (102) ein. Falls erforderlich, kann man diese δ', δ'' in Gleichung (101) und die dann erhaltenen $\sigma'\sigma''$ wieder in (102) einsetzen usf., um die Werte zu verbessern.

Auch die Berechnung des Dreideckers gestaltet sich einfacher mit Einführung von Hilfsgrößen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \eta_1 t_1 + \eta_3 t_3 & \mathfrak{K} &= \varphi_1 + \varphi_3 \\ \delta &= \eta_1 t_1 - \eta_3 t_3 & k &= \varphi_1 - \varphi_3 \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

$$\left.\begin{aligned} (4+\nu-\ln 2)\,\sigma + 2\nu\eta_2 t_2 &= \mathfrak{K} \\ (4-\nu+\ln 2)\,\delta + 2\,\frac{c}{b}\cdot\eta_2 t_2 &= k \\ \nu\cdot\sigma + \frac{c}{b}\cdot\delta + 4\,\eta_2 t_2 &= \varphi_2 \end{aligned}\right\} \qquad (104)$$

Die Auflösung nach $\eta_2 t_2$ mit

$$(105) \qquad \sigma = \frac{\mathfrak{K} - 2\nu\cdot\eta_2 t_2}{4+\nu-\ln 2} \qquad\qquad \delta = \frac{k - 2\,\frac{c}{b}\,\eta_2 t_2}{4-\nu+\ln 2} \qquad (106)$$

führt auf: $$\nu\cdot\frac{\mathfrak{K} - 2\nu\cdot\eta_2 t_2}{4+\nu-\ln 2} + \frac{c}{b}\cdot\frac{k - 2\,\frac{c}{b}\cdot\eta_2 t_2}{4-\nu+\ln 2} + 4\,\eta_2 t_2 = \varphi_2 \qquad (107)$$

eine Gleichung, die numerisch leicht auszuwerten ist. Für den Zweidecker erhält man:

$$\eta_1 t_1 = \frac{4\,\varphi_1 - \nu\varphi_2}{16-\nu^2} \qquad \eta_2 t_2 = \frac{4\varphi_2 - \nu\varphi_1}{16-\nu^2}\,. \qquad (108)$$

und für den Eindecker: $$\eta_1 t_1 = \frac{\varphi_1}{4}\,. \qquad (109)$$

E. Der Berechnungsvorgang.

Um die Maximumsberechnung durchzuführen, sind zunächst Annahmen für $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$ und t zu machen, die Koeffizienten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu errechnen und nebst gleichfalls angenommenen Werten η_i in (89) einzuführen. Die re-

sultierenden φ_i bestimmen nach (92) $\eta_i t_i$ und aus ihnen folgen nach (39) $\frac{\eta_I}{\eta_1}$ usf. Mit

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\eta_I}\cdot(\eta_1 t_1)\cdot\frac{\eta_I}{\eta_1} \\ t_2 &= \frac{1}{\eta_{II}}\cdot(\eta_2 t_2)\cdot\frac{\eta_{II}}{\eta_2} \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

ergeben sich schließlich die Flügeltiefen, indem man den η_I, η_{II}, η_{III} je nach dem verfügbaren Profil zulässige (S. 119) Größtwerte (0, 4,..., 0, 7) gibt. Dann folgen erste Näherungen für η_1, η_2, η_3 aus

$$\eta_1 = \frac{\eta_1 t_1}{t_1} \tag{111}$$

usf. Mit all dem folgen nun neue Werte für $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{J}$, G. Diese bilden die Grundlage für eine Wiederholung der ganzen Rechnung, die so oft durchgeführt wird, bis Voraussetzung und Resultat hinreichend übereinstimmen. In Fall I bedarf der eben angegebene Rechnungsgang der Vorberechnung des Wertes $\varkappa$. Man setzt im dritten Glied von (89)

$$\varphi_i = \pi b_i \varkappa\left(\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}} - \frac{\mathfrak{X}\cdot q_i}{G\cdot\eta_i} - \frac{\psi_i}{\varkappa\eta_i}\right) \tag{112}$$

$\varkappa$ zunächst gleich der Einheit, der es nahesteht; dann erscheinen die Werte φ_i und mit ihnen nach (92) die $\eta_i t_i$ proportional $\varkappa$ und damit

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{V}\varkappa, \qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{W}\varkappa^2. \tag{113}$$

Nunmehr folgt $\varkappa$ leicht aus der Nebenbedingung Gl. (62)

$$1 + \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{S}+\mathfrak{P}}\varkappa^2 = \frac{\sqrt{\varrho}\cdot L\cdot\mathfrak{V}^{\frac{3}{2}}}{(\mathfrak{S}+\mathfrak{P})\,G^{\frac{3}{2}}}\cdot\varkappa^{\frac{3}{2}}.^{1)} \tag{114}$$

Mit $\varkappa$ ergeben sich rein numerisch $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{J}$, und von da ab nimmt der Lösungsgang seinen Verlauf, wie oben für alle vier Fälle angegeben.

Daß wir für die Flügeltiefen schon von vornherein zur Berechnung von Profilwiderstand und Flügelgewicht Annahmen zu machen hatten, wird kaum auf den Berechnungsgang zurückwirken, wenn die Annahmen nur einigermaßen richtig waren. Denn es lassen sich vor der konstruktiven und statischen Durcharbeitung des Entwurfs weder die Flügeleinheitsgewichte q noch der Stirnwiderstand mit einer Genauigkeit angeben, die eine allzu strenge Durchführung der Rechnung rechtfertigen könnte. Überdies wird man überhaupt nur ausnahmsweise eine der Konstruktionsrichtungen I ... IV rücksichtslos innehalten, also demgemäß berechnete Werte t ohne weiteres verwirklichen dürfen. Denn die höchste Leistungsfähigkeit in einer Richtung bringt notwendigerweise verringerte Leistungen in den drei übrigen

1) Rechenschieber mit 2. und 3. Potenz lassen die $\frac{3}{2}$ Potenz ohne weiteres ablesen.

mit sich; und wenn diese Bevorzugung einer Konstruktionsrichtung einseitig geschieht, so ergeben sich für die andern Nachteile, die durch den gewonnenen Vorteil in keiner Weise aufgewogen werden, im besonderen, wenn wie gewöhnlich das Maximum sehr breit, also die Leistung in der vorgesetzten Richtung innerhalb gewisser Grenzen gegen die Dimensionierung ziemlich unempfindlich ist. In Rücksicht hierauf darf man auch ohne weiteres geringfügige Unterschiede der berechneten Flügeltiefen eines n-Deckers durch Mittelwertsbildung ausgleichen, um Konstruktion und Herstellung zu vereinfachen. Soweit nicht andere Gründe mitsprechen, wird man, wie gesagt, dabei den Grad der Staffelung, der, wie wir oben (Gl. 25) sahen, bei entsprechender Schränkung der Flügel zueinander auf den Widerstand keinen Einfluß hat, so wählen, daß man durch günstige statische Verhältnisse die geforderte Bausicherheit mit geringsten Fachwerksgewichten erreicht.

F. Die Erreichung kürzester Flugdauer für gegebene Entfernung.

Wenn wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels vorausgesetzt haben, daß bereits die Wahl der Motoren nach Art und Zahl erfolgt sei, so bezieht sich das auf Aufgaben, die nicht aus dem Erfahrungsbereich des Konstrukteurs herausführen. Für alle anderen Fälle sind wir verpflichtet, dem Konstrukteur einen Anhalt für diese Wahl zu geben. Die verkehrstechnisch wichtigste Aufgabe fordert, mit gegebener Nutzlast eine gegebene Strecke in möglichst kurzer Zeit zu durchfliegen. Für kleine Entfernungen, für die man die Abnahme des Betriebsstoffgewichts mit der Flugdauer vernachlässigen kann, ist diese Aufgabe bereits mit Fall I gelöst. Bei größeren Entfernungen jedoch spielt der Anteil des Betriebsstoffes am Gesamtgewicht und damit dessen Veränderlichkeit während des Fluges eine bedeutende Rolle. Und nicht nur aus diesem Grunde wächst mit der Steigerung der Leistung zugleich die Anforderung an diese. Denn auch außer dem Gewicht des nackten Motors wachsen fast alle anderen Gewichte des leeren Flugzeuges wesentlich proportional der Leistung des Motors. Von der Motorleistung unabhängig ist eigentlich nur die Nutzlast. Wir bezeichnen mit:

- z die Zeit in Stunden vom Augenblick des Starts an gerechnet (Flugzeit),
- z_0 die Dauer des Fluges (Flugdauer) in Stunden,
- P_0 den von der Motorleistung unabhängigen Teil des Gesamtgewichts in kg,
- p_0 den der Leistung proportionalen Teil des Gesamtgewichts in kg/PS,
- q_0 den Betriebsstoffverbrauch (Benzin und Öl) für die Pferdekraft und Stunde in kg/PS. st.,
- $\mathfrak{E}$ die Entfernung von Ausgangspunkt und Zielpunkt des Fluges (Flugstrecke) in km.

Dann ist das Gesamtgewicht als Funktion der Flugzeit

$$G = P_0 + p_0 \cdot N + q_0 N (z_0 - z). \tag{115}$$

Andererseits ergibt sich der Augenblickswert der Geschwindigkeit für wagerechten Flug ($\dot{w} = 0$) in Abhängigkeit von der Flugzeit, wenn wir Gl. (56) in Gl. (57) dividieren mit (58) zu

$$V = 3{,}6\, v = \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}} \cdot \frac{N}{G} \cdot 75 \cdot 3{,}6 \cdot \eta_s. \tag{116}$$

Der Mittelwert der Geschwindigkeit während des ganzen Fluges, der zu Flugstrecke und Flugdauer in der Beziehung

$$V_m = \frac{\mathfrak{E}}{z_0} \text{ km/st} \tag{117}$$

steht, folgt nun aus der Integration

$$V_m = 75 \cdot 3{,}6 \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} \eta_s \cdot \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}} \cdot \frac{N}{P_0 + p_0 N + q_0 \cdot N \cdot (z_0 - z)}\, dz. \tag{118}$$

Unter den Voraussetzungen $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}} =$ konst., $N =$ konst. liefert Gl. (118) mit der Einführung von Gl. (117) für einen Mittelwert des Schraubenwirkungsgrades

$$z_0 = \frac{P_0/N + p_0}{q_0} \cdot (e^{\mathfrak{E}/\mathfrak{F}} - 1), \tag{119}$$

worin

$$\mathfrak{F} = 75 \cdot 3{,}6 \cdot \frac{\eta_s}{q_0} \cdot \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}} \text{ km}. \tag{120}$$

Je größer also die von der Motorleistung unabhängige Last P_0 (Nutzlast) ist, um so wichtiger ist es, zur Verkürzung der Flugdauer große Leistungen einzubauen. Die gleiche Forderung erhebt der Exponent der natürlichen Zahl. Denn mit Vergrößerung der Flugzeuge tritt der schädliche Widerstand im Gesamtwiderstand gewöhnlich mehr zurück, und dadurch sinkt das Verhältnis von Widerstand zu Auftrieb, dessen Minimum einem Minimum der Flugdauer entspricht. Zum mindesten bringt die Steigerung der Spannweite mit Vergrößerung des Flugzeugs im allgemeinen eine Zunahme des Seitenverhältnisses mit sich, die außerordentlich günstig durch Verminderung des induzierten Widerstandes wirkt. Daher ist die Vergrößerung der Flugzeuge zur Steigerung ihrer Rentabilität um so wesentlicher, je größer die Entfernung ist, die in einem ununterbrochenen Fluge zurückgelegt werden muß. Dies veranschaulicht Fig. 8, die bei einem Betriebsstoffverbrauch (Benzin und Öl) von $q_0 = 0{,}235$ kg/PS st. und einem mittleren Schraubenwirkungsgrad $\eta_s = 0{,}70$ für $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}} = 0{,}08;\ 0{,}10;\ 0{,}12;\ 0{,}14$ ($\mathfrak{F} = 9600;\ 7700;\ 6400;\ 5500$) den Wert des Binoms ($e^{\mathfrak{E}/\mathfrak{F}} - 1$) angibt. Der Faktor des Binoms liegt gewöhnlich zwischen 20 und 40. Für sehr

günstige Verhältnisse gibt also die Figur die Flugdauer etwa in Bruchteilen eines vollen Tages. Die Darstellung zeigt, daß die Proportionalität

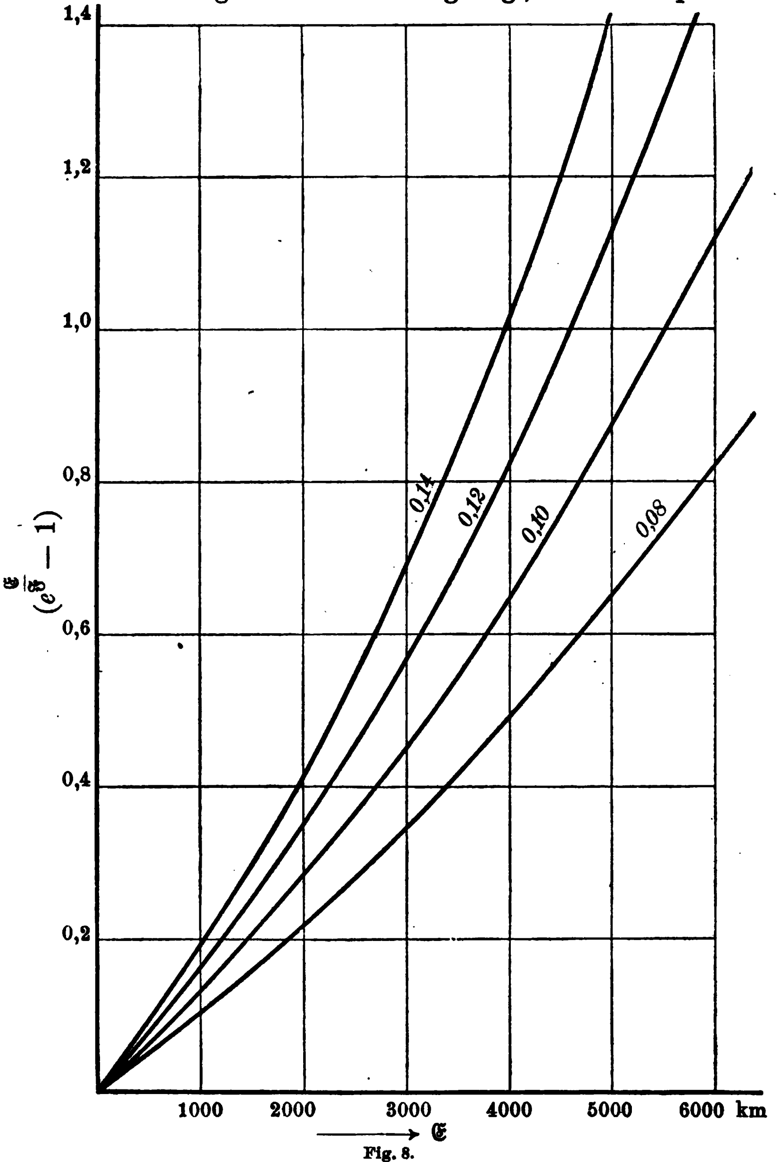


Fig. 8.
Die Abhängigkeit der Flugzeit von der Flugstrecke.

der Flugdauer mit der Entfernung, wie sie für Überschlagsrechnungen bei kleinen Entfernungen recht wohl zutrifft, für große Entfernungen

keineswegs mehr zulässig ist. Hier kann die Steigerung der Entfernung um einen nur geringen Bruchteil die Flugdauer wesentlich stärker erhöhen. Dies beruht eben vor allem darauf, daß das Betriebsstoffgewicht, das der Flugstreckenzuwachs erfordert, während des ganzen Fluges mitgeschleppt werden muß, und bei gegebener Leistung die Geschwindigkeit herabsetzt.

Nachdem man sich auf Grund der Überschlagsrechnung für die Flugdauer, Gl. (119), für die Stärke der Motorleistung entschieden hat, kann man dementsprechend den schädlichen Widerstand und die Gesamtlast P des Flugzeuges mit einer größeren Genauigkeit, als sie Gl. (115) zukommt, bestimmen. Man hat dann die Zelle entsprechend Fall I für das Startgewicht zu berechnen. Im allgemeinen ergibt sich größte Wirtschaftlichkeit (beste Flugleistung), wenn der Berechnung die Bodendichte ϱ_0 zugrunde gelegt wird. Man wird jedoch nur ausnahmsweise für den dieser Dimensionierung entsprechenden langen Anlauf hinreichend große und „gute" (eben, hart) Plätze zur Verfügung haben. (Vgl. Kapitel VIII.) Andererseits ist ja auch beim Flug über Land aus Sicherheitsgründen eine bestimmte Mindestflughöhe einzuhalten. Mit wachsender Entlastung durch den Betriebsstoffverbrauch wird dann während des Fluges das Flugzeug unter Beibehaltung des günstigsten Anstellwinkels, dem das Minimum von $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}}$ zukommt, sehr langsam steigen, wobei wir in der Rechnung vorausgesetzt haben, daß die Leistung bis zur größten erreichbaren Flughöhe unveränderlich ist. Unter dieser Voraussetzung ($\lambda = 1$; Gl. 123) gilt, wie aus dem folgenden Kapitel zu ersehen ist, nach Gl. (151) und (130):

$$G \sim \varepsilon^{\frac{1}{3}} \quad \varepsilon^{\frac{1}{3}} = \left(1 - \frac{H}{50}\right)^{\frac{5}{3}} \quad G \sim \left(1 - \frac{H}{30}\right). \tag{121}$$

Macht also das Betriebsstoffgewicht $\frac{1}{5}$ des Startgewichts aus, so werden am Ende des Fluges 6000 m erreicht. Die Motorleistung müßte also bis zu dieser oder allgemein bis zu der durch Gl. (121) bestimmten Höhe von der Dichteänderung der Luft unabhängig gemacht werden (Höhenmotoren, S. 35). Ist dies nicht der Fall, oder sucht man wegen der physiologischen Wirkungen große Höhen zu meiden, so treffen die Voraussetzungen unserer Rechnung nicht mehr zu, und der durch Gl. (119) angegebene Betrag für die Flugdauer wird überschritten, da in gegebener Höhe zwar die Leistung unveränderlich ist, aber $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}}$ mit Abnahme des Anstellwinkels, wie sie die Gewichtsveränderung durch den Betriebsstoffverbrauch bedingt, zunimmt.

III. Die Berechnung der Flugleistungen.

A. Die Berechnung der Dichteabnahme mit der Höhe.

Zur Berechnung der Flugleistungen muß die Abhängigkeit der Luftdichte und der Motorleistung von der Höhe bekannt sein. Wir kennzeichnen diese Funktionen, unabhängig von absoluten Beträgen, durch Verhältniszahlen:

(123) $$\varepsilon = \frac{\varrho}{\varrho_0}. \qquad \lambda = \frac{L}{L_0},$$ (122)

wobei Index $_0$ den Wert in Bodennähe bezeichnet. Da wir λ als das Verhältnis der Nutzleistungen einführen, ist darin die Veränderlichkeit des Wirkungsgrades η_s der Schraube mit enthalten. Es wäre jedoch verfehlt, angesichts der Schwankungen, denen der thermische Wirkungsgrad des Motors durch untergeordnete Einflüsse, Kühlung u. s. f., ausgesetzt ist, diese Veränderlichkeit in die Rechnung einzuführen. Man setzt vorläufig einfach einen wahrscheinlichen Wert bzw. Mittelwert ein.

Wir werden nun zunächst die Funktion ε der Dichteabnahme mit der Höhe ermitteln. Bekanntlich nimmt die Temperatur der Luft mit der Höhe ab. Diese Temperaturabnahme ist selbst zu verschiedenen Jahreszeiten und in sehr verschiedenen Breiten nahezu dieselbe und bis 10 km Höhe nahezu unveränderlich. Eine lineare Abhängigkeit der Temperatur von der Höhe ergibt sich aber auch, wenn man die bei der Kompression von Gasen gültige Beziehung zwischen Druck P und Dichte ϱ auf den mittleren Gleichgewichtszustand der Atmosphäre anwendet. Diese Beziehung wird durch eine einfache Potenzfunktion ausgedrückt:

(124) $$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^m = \varepsilon^m, \qquad dP = m \cdot \frac{P_0}{\varrho_0^m} \cdot \varrho^{m-1} \cdot d\varrho.$$ (125)

Andererseits gilt für die Druckabnahme mit der Höhe

$$dP = -\varrho \cdot g \cdot 1000\, dH. \text{ kg m}^{-2}$$ (126)

Daher wird unter Berücksichtigung der „Zustandsgleichung"

(127) $$\varrho \cdot g \cdot R \cdot T = P. \qquad \frac{T}{T_0} = \varepsilon^{m-1},$$ (128)

worin die „Gaskonstante" für trockene Luft $R = 29{,}27\ m$ beträgt und T die „absolute" Temperatur bedeutet,

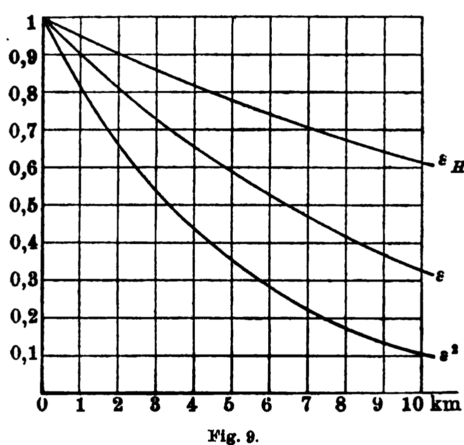
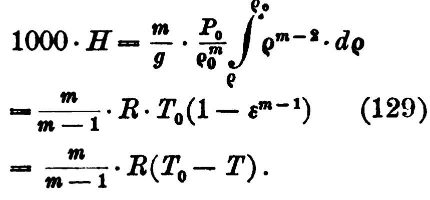


Fig. 9.
Die Dichteabnahme der Luft mit der Höhe, sowie deren Quadrat und Mittelwert.



$$1000 \cdot H = \frac{m}{g} \cdot \frac{P_0}{\varrho_0^m} \int_{\varrho}^{\varrho_0} \varrho^{m-2} \cdot d\varrho$$

$$= \frac{m}{m-1} \cdot R \cdot T_0 (1 - \varepsilon^{m-1}) \qquad (129)$$

$$= \frac{m}{m-1} \cdot R (T_0 - T).$$

Nun ist die mittlere Temperatur über Mitteleuropa (Lit. 43) am Boden + 10,5° und in 6 km Höhe − 23,7°; damit wird $m = 1{,}20$ und

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{H}{50}\right)^5. \qquad (130)$$

Diese Funktion, sowie ihre später benötigten Potenzen ε^2, $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ und Mittelwerte

$$\varepsilon_H = \frac{1}{H} \int_0^H \varepsilon \, dH = \frac{50}{H} \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{H}{50}\right)^6}{6} \qquad (131)$$

$$\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)_H = \frac{1}{H} \int_0^H \varepsilon^{-\frac{1}{2}} dH = \frac{50}{H} \cdot \frac{\left(1 - \frac{H}{50}\right)^{-1,5} - 1}{1{,}5} \qquad (132)$$

haben wir in Tabelle 1 und in Figur 9 und 10 eingetragen:

Fig. 10.
Der reziproke Wert der Wurzel aus der Dichteabnahme mit der Höhe und dessen Mittelwert.

Tabelle 1.

H	ε	ε^2	$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$	ε_H	$\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)_H$	$20(1 - \varepsilon^{0,7})$
0	1	1	1	—	—	—
2	0,815	0,664	1,108	0,905	1,050	2,72
4	0,659	0,434	1,232	0,820	1,108	5,20
6	0,528	0,279	1,377	0,744	1,172	7,20
8	0,418	0,175	1,546	0,676	1,246	9,14
10	0,328	0,108	1,747	0,615	1,323	10,82

B. Die Berechnung der Leistungsabnahme mit der Höhe.

Auf der Abnahme der Luftdichte beruht auch die Leistungsabnahme der Motoren mit der Höhe. Unmittelbar mit der Luftdichte sinkt das mit der Zeiteinheit angesaugte Luftgewicht, und damit die für die Verbrennung des verdampften Brennstoffes verfügbare Sauerstoffmenge. Die indizierte Leistung des Motors wird daher wesentlich der Luftdichte proportional sein, wenn nur genügend Brennstoff zugeführt wird. Das ist aber ohne weiteres der Fall, denn da das spezifische Gewicht des Brennstoffs γ_B vom Luftdruck unabhängig ist, hat der Unterdruck an der Düsenbohrung, an der die Luft mit der lediglich von der Drehzahl abhängigen Geschwindigkeit v_L vorbeistreicht,

$$\varrho \cdot \frac{v_L^2}{2} = \gamma_B \frac{v_B^2}{2g} \tag{133}$$

eine Anreicherung des Gemisches mit Brennstoff zur Folge. Denn bei unveränderten Querschnitten sind die Lieferungen dem spezifischen Gewicht und der Geschwindigkeit direkt proportional:

$$\frac{\varrho \cdot v_L}{\gamma_B \cdot v_B} \sim \sqrt{\varrho} \sim \sqrt{\varepsilon}. \tag{134}$$

Das Mischungsverhältnis Luft zu Benzindampf nimmt also mit der Wurzel aus dem Dichteverhältnis ab. Man hat daher, um die Brennstoffverschwendung zu vermeiden, den Unterdruck an der Düsenbohrung oder den Austrittsquerschnitt des Brennstoffs herabzusetzen. Die damit verbundene Ersparnis an Betriebsstoffen bedeutet besonders für lange Flüge in großer Höhe eine wesentliche Steigerung der verfügbaren Nutzlast oder der Reisegeschwindigkeit. Andererseits aber scheint es vorteilhafter, den überschüssigen Brennstoff zur Leistungssteigerung des Motors heranzuziehen, indem man ihm auf irgend eine Art den zur Verbrennung erforderlichen Sauerstoff zur Verfügung stellt. Dies kann auf verschiedene Art und Weise geschehen. Man führt entweder direkt verdichteten Sauerstoff zu oder man verdichtet die Ansaugeluft mittels eines vom Motor getriebenen Gebläses. Auf diese Weise kann man bei einem

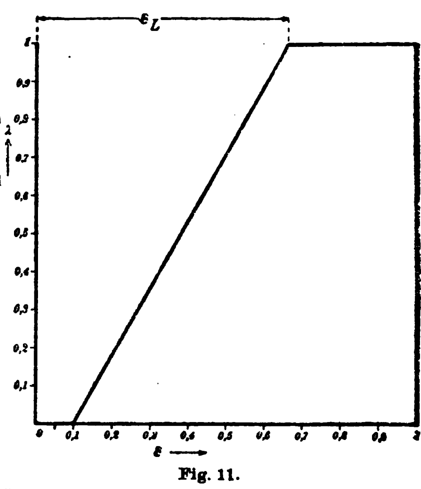


Fig. 11.
Die Leistungsabnahme von Höhenmotoren in Abhängigkeit von der Dichteabnahme der Luft.

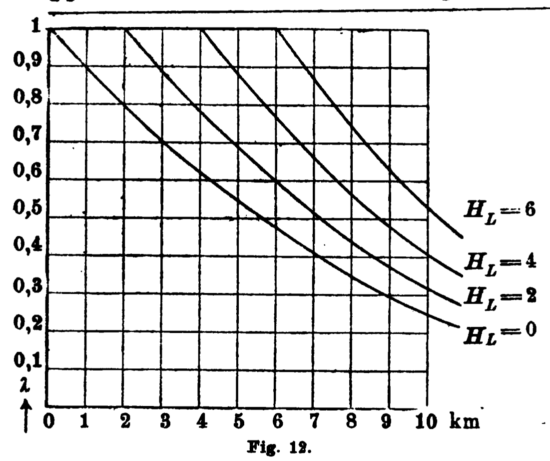


Fig. 12.
Die Leistungsabnahme von Motoren mit verschiedenen Gleichleistungsgrenzen in Abhängigkeit von der Höhe.

gegebenen Motor die Leistungsabnahme mit der Höhe stark verzögern, ja die Leistung sogar bis zu mittleren Höhen konstant erhalten. Zum gleichen Ziel führt jedoch noch ein viel einfacherer Weg. Der Motor wird von vornherein für eine bestimmte Höhe gebaut: Höhenmotor, und um zu verhindern, daß bei größeren Luftdichten, wie sie unterhalb dieser Höhe vorhanden sind, die zulässige Triebwerkbeanspruchung und der zulässige Wärmedurchgang durch die Zylinderwandungen überschritten wird, wird die angesaugte Luft vor dem Vergaser automatisch auf die verringerte Luftdichte herabgedrosselt. Die induzierte Leistung bleibt dann also bis zur Gleichleistungsgrenze H_L unveränderlich und sinkt von da ab mit der Luftdichte. Setzt man, wie Kutzbach für zulässig erachtet (Lit. 24) voraus, daß die Reibungsarbeit und Betriebsstofförderung bei 10 % der Bodendichte von der induzierten Leistung gerade noch aufgebracht wird, so ergibt sich für die effektive Leistung eine Abhängigkeit, wie wir sie durch λ über ε in Diagramm Fig. 11 dargestellt haben. Oberhalb H_L gilt also:

$$\lambda = \frac{\varepsilon - 0,1}{\varepsilon_L - 0,1}. \qquad (135)$$

Unterhalb H_L ist natürlich λ unveränderlich gleich Eins (Fig. 12). Die Mittelwertsbildung, die Gl. (91) fordert, liefert für größere Höhen $H > H_L$:

$$\lambda_H = \frac{1}{H}\left[\int_0^{H_L} 1 \cdot dH + \int_{H_L}^{H} \frac{\varepsilon - 0,1}{\varepsilon_L - 0,1} \cdot dH\right] \qquad (136)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_L - 0,1} \cdot \left(\varepsilon_H - 0,1 + \frac{H_L}{H}[\varepsilon_L - \varepsilon_{H_L}]\right).$$

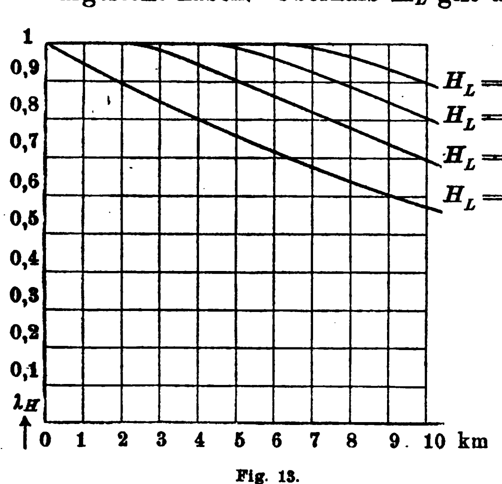


Fig. 13.
Mittelwerte der Leistung im Verhältnis zur Bodenleistung für verschiedene Gleichleistungsgrenzen in Abhängigkeit von der Höhe.

λ und λ_H, Gl. (135), (136), haben wir zusammen mit den später benötigten Funktionen $\frac{\lambda}{\varepsilon}$, $\sqrt[3]{\lambda^2 \varepsilon}$ für

Motoren mit den Gleichleistungsgrenzen $H_L = 0, 2, 4$ und 6 km in den Tabellen 2 bis 5 eingetragen. Um auch für andere Gleichleistungsgrenzen und andere als die in den Tabellen angegebenen Höhen Werte leicht interpolieren zu können, sind zudem diese Funktionen in den Diagrammen 12 bis 15 dargestellt.

Tabelle 2, $H_L = 0$.

H	λ	λ_H	$\frac{\lambda}{\varepsilon}$	$\sqrt[3]{\lambda^2 \cdot \varepsilon}$
0	1	—	1	1
2	0,794	0,894	0,974	0,801
4	0,621	0,800	0,942	0,638
6	0,476	0,716	0,902	0,493
8	0,353	0,640	0,844	0,373
10	0,253	0,572	0,771	0,276

Tabelle 3, $H_L = 2$.

H	λ	λ_H	$\frac{\lambda}{\varepsilon}$	$\sqrt[3]{\lambda^2 \cdot \varepsilon}$
0	1	—	1	1
2	1	1	1,227	0,935
4	0,782	0,944	1,187	0,739
6	0,599	0,859	1,134	0,575
8	0,445	0,774	1,065	0,436
10	0,319	0,695	1,973	0,322

Tabelle 4, $H_L = 4$.

H	λ	λ_H	$\frac{\lambda}{\varepsilon}$	$\sqrt[3]{\lambda^2 \cdot \varepsilon}$
0	1	—	1	1
2	1	1	1,227	0,935
4	1	1	1,517	0,870
6	0,766	0,961	1,450	0,677
8	0,569	0,886	1,361	0,513
10	0,408	0,806	1,244	0,379

Tabelle 5, $H_L = 6$.

H	λ	λ_H	$\frac{\lambda}{\varepsilon}$	$\sqrt[3]{\lambda^2 \cdot \varepsilon}$
0	1	—	1	1
2	1	1	1,227	0,935
4	1	1	1,517	0,870
6	1	1	1,894	0,808
8	0,743	0,968	1,778	0,613
10	0,533	0,900	1,625	0,453

C. Die Berechnung der Geschwindigkeiten.

Mit Einführung der Funktionen ε und λ lauten die Gleichungen (56) (57) für die Geschwindigkeit im Horizontalflug:

$$G - \varepsilon \cdot \mathfrak{Y} \cdot \varrho_0 \cdot v^2 = 0. \quad (137) \qquad \lambda L_0 - \varepsilon \cdot \mathfrak{X} \cdot \varrho_0 \cdot v^3 = 0. \quad (138)$$

Nun ist nach Gl. (113) der induzierte Widerstand dem Quadrat des Auftriebs proportional

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{Y}^2}{\mathfrak{Z}}, \tag{139}$$

der schädliche Widerstand und der Profilwiderstand hingegen vom Anstellwinkel wesentlich unabhängig, wie wir schon oben durch Gl. (79) zum Ausdruck gebracht haben. Führen wir Gl. (139) in Gl. (138) ein und eliminieren darauf $\mathfrak{Y}$ mit Gl. (137), so ergibt sich:

$$\lambda \cdot L_0 - \varepsilon \varrho_0 \left(\mathfrak{S} + \mathfrak{P} - \frac{G^2}{\mathfrak{Z} \cdot \varepsilon^2 \varrho_0^2 v^4}\right) v^3 = 0. \tag{140}$$

Bezeichnen wir kurz mit

$$\mathfrak{F} = \frac{G^2 \cdot 3{,}6^4}{\varrho_0^2 \cdot \mathfrak{Z}(\mathfrak{S} + \mathfrak{P})}, \quad \mathfrak{G} = \frac{L_0 \cdot 3{,}6^3}{\varrho_0(\mathfrak{S} + \mathfrak{P})}, \tag{141}$$

so erhalten wir

$$-\frac{\mathfrak{F}}{\varepsilon^2} + \mathfrak{G}\frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot V = V^4, \tag{142}$$

d. h. die Geschwindigkeit im Horizontalflug V folgt aus einer Darstellung der biquadratischen Parabel V^4 über V, indem man diese Parabel mit den Geraden $-\frac{\mathfrak{F}}{\varepsilon^2} + \mathfrak{G}\frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot V$ schneidet (Fig. 16). Ergibt sich so für verschwindende Steigleistung die Höchstgeschwindigkeit, so folgt andererseits bei größtem Anstellwinkel, d. h. größtem zulässigen Wert $\mathfrak{Y}_{\max}$, die Kleinstgeschwindigkeit aus

$$V_{\min} = \frac{3{,}6}{\sqrt{\varrho_0}} \cdot \sqrt{\frac{G}{\mathfrak{Y}_{\max}}} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{2}}. \tag{143}$$

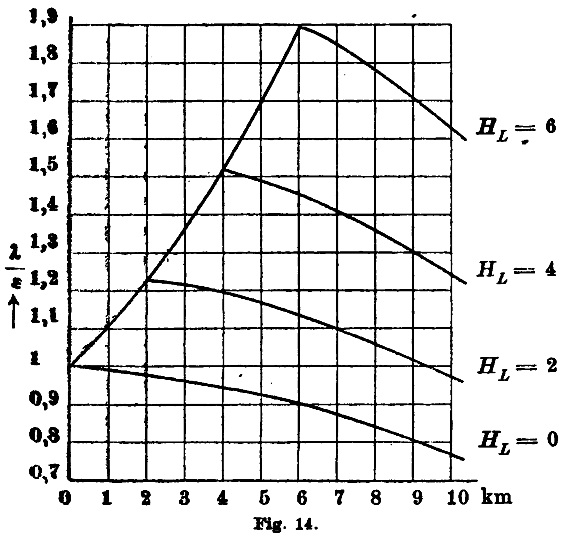


Fig. 14.
Das Verhältnis der Leistungsabnahme zur Dichteabnahme in Abhängigkeit von der Höhe.

Sie läßt sich fliegerisch, abgesehen von dem erforderlichen Höhensteuerausschlag, dadurch herbeiführen, daß man die Motorleistung durch Drosseln der Brennstoffzufuhr herabsetzt oder ihren Überschuß über den für die Vortriebsleistung erforderlichen Betrag als Steigleistung ausnutzt. Stellt man Größt- und Kleinstgeschwindigkeit diagrammatisch über der Höhe dar, so schließen beide Kurven das Gebiet der jeweils erreichbaren Geschwindigkeiten ein, und ihr Schnittpunkt liefert die Gipfelhöhe, in der die Steigleistung verschwindet, weil die Nutzleistung gerade nur noch hinreicht, die zum Tragen des Gewichts erforderliche Vortriebsleistung zu liefern (Fig. 46).

D. Die Berechnung der Gipfelhöhe und der Tragfähigkeit.

Die Vortriebsleistung muß also in der Gipfelhöhe einen Kleinstwert erreichen. Die Bedingung hierfür ist, wie wir schon oben (S. 21) gezeigt haben, daß $\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}$ ein Minimum erreicht. Das geschieht, wenn

(144) $\quad d\left(\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}\right) = 0 \qquad 2\mathfrak{Y}_* d\mathfrak{X} - 3\mathfrak{X}_* d\mathfrak{Y} = 0 \quad$ (145)

und mit Gl. (139) $\quad d\mathfrak{X} = d\mathfrak{J} = 2\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Z}} \cdot d\mathfrak{Y} = 2\mathfrak{J}\frac{d\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Y}} \quad$ (146)

folgt aus Gl. (145)

$$4\mathfrak{J}_* - 3\mathfrak{X}_* = 0, \quad (147) \qquad \mathfrak{J}_* = 3(\mathfrak{S} + \mathfrak{P}) \quad (148)$$

$$\mathfrak{X}_* = 4(\mathfrak{S} + \mathfrak{P}), \quad (149) \qquad \mathfrak{Y}_* = \sqrt{3\mathfrak{Z}(\mathfrak{S} + \mathfrak{P})}. \quad (150)$$

Diese Werte sind praktisch nicht erreichbar, da sich schon bei viel kleineren Werten der Anstellwinkel, als sie diese Gleichungen erfordern, eine sprungweise Änderung des Strömungsbildes einstellt, die die weitere Steigerung der Auftriebszahlen verhindert und den Widerstand ganz außerordentlich steigert. Jedenfalls muß man, um den erreichbaren Kleinstwert von $\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}$ zu verwirklichen, dem eben bezeichneten Grenzwert nahebleiben, so weit dadurch nicht die ruhige Lage des Flugzeugs beeinträchtigt wird. Denn wie wir später sehen werden (S. 119), tritt mit dem Überschreiten des Grenzwertes eine vollkommene seitliche Labilität ein, die zum sofortigen seitlichen Absturz des Flugzeugs führt. Für die Berechnung der größten Tragfähigkeit und der kürzesten Steigzeiten hat man also $\left(\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}\right)$ mit denjenigen Größtwerten der Auftriebszahlen zu bestimmen, wie sie (S. 28) für die Maximalberechnungen, Fall I—IV, für zulässig erachtet wurden. Dann liefert Gl. (62) die größte Tragfähigkeit in Abhängigkeit von der Flughöhe

$$G_{\max} = \sqrt[3]{\lambda^2 \cdot \varepsilon} \cdot \sqrt[3]{\frac{L_0^2 \cdot \varrho_0}{\left(\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}\right)_{\min}}}. \quad (151)$$

Es genügt also für jeden Motortyp ein für alle Mal, die Funktion $\sqrt[3]{\lambda^2 \cdot \varepsilon}$ über der Höhe aufzutragen, um in einem durch die Abmessungen des Flugzeugtyps gegebenen Maßstabe dessen Tragfähigkeit in verschiedenen Höhen ohne weiteres ablesen zu können (Fig. 15). Man erhält hieraus eine Kontrolle für die Bestimmung der Gipfelhöhe aus dem Geschwindigkeitsdiagramm bei dem für dieses gültigen Normalgewicht des Typs.

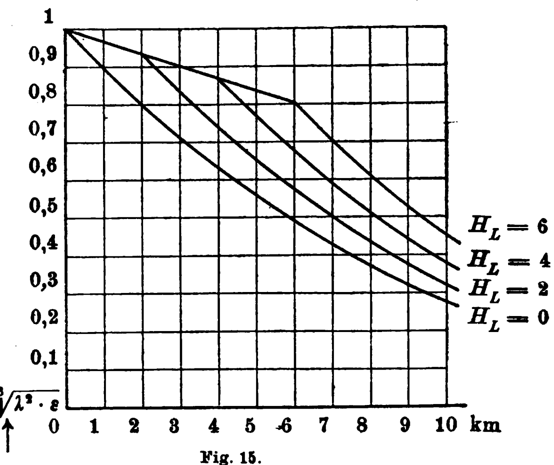


Fig. 15.
Die Tragfähigkeit in Abhängigkeit von der Gipfelhöhe.

Die Gipfelhöhe ist indes für größere Flugzeuge nicht allein ein Maß für Steig- oder Tragfähigkeit, sondern auch für die Betriebssicherheit. Denn man wird bis auf weiteres von mehrmotorigen Flugzeugen zu fordern haben, daß sie, auch wenn ein Motor aussetzt,

weiterfliegen können. Setzt bei einem Flugzeug mit m gleichstarken Motoren einer aus, so hat man für den Weiterflug nunmehr einen Bruchteil $\frac{m-1}{m}$ der Nutzleistung zur Verfügung. Der der Gipfelhöhe des ungestörten Fluges nach Gl. (151) entsprechende Kleinstwert $\sqrt[3]{\lambda^2 \varepsilon}$ vergrößert sich also durch die Störung mit $\left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{2}{3}}$; d. h.

für m	2	3	4	5	6
mit $\left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{2}{3}}$	1,58	1,31	1,21	1,16	1,13.

Das führt natürlich bei geringer Motorzahl und kleiner Gipfelhöhe leicht zu Werten $\sqrt[3]{\lambda^2 \varepsilon} > 1$, die anzeigen, daß bei Ausfall eines Motors ein Weiterflug nicht

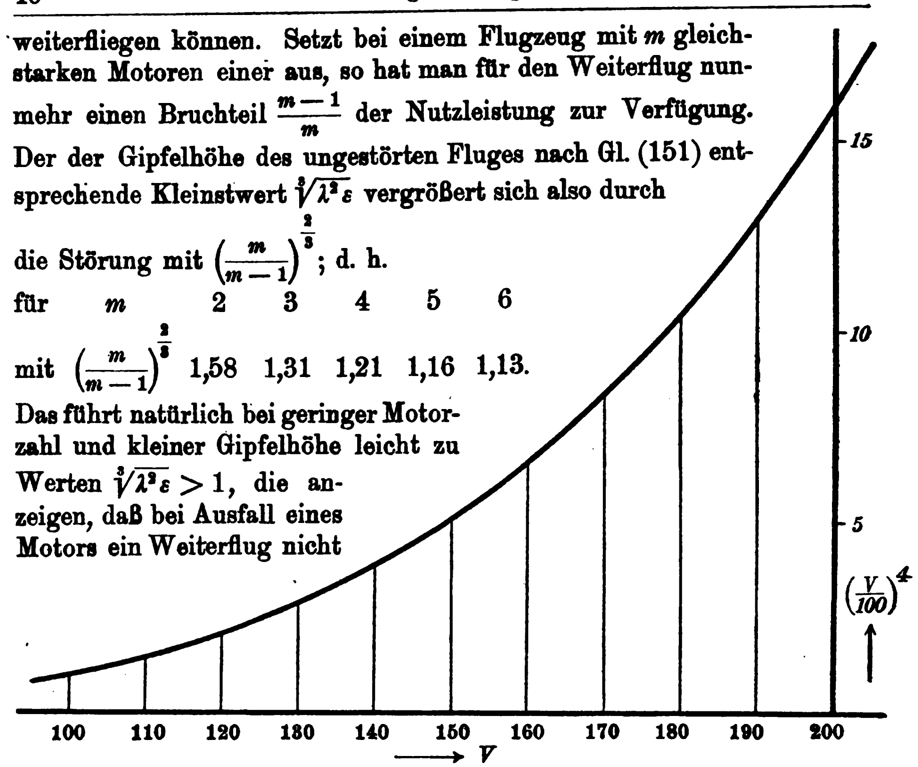


Fig. 16
zeigt $V^4 \cdot 10^{-8}$ über V in dem in Frage stehenden Bereich der Flugzeuggeschwindigkeiten von 100 bis 200 km pro Stunde. Man trägt im Maßstabe der Figur die Schar der Geraden $-\frac{\mathfrak{F}}{\varepsilon^2} + \mathfrak{G}\frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot V$ auf durchsichtigem Papier auf, bringt sie mit dem Diagramm zur Deckung und kann dann ohne weiteres unter dem Schnittpunkt der Geraden mit der Kurve auf der Abszissenachse der Figur die Geschwindigkeiten ablesen.

möglich ist. Denn $\sqrt[3]{\lambda^2 \varepsilon} = 1$ entspricht Bodennähe. Liest man umgekehrt für die Werte $\sqrt[3]{\lambda^2 \varepsilon} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{\frac{2}{3}}$ die verschiedenen Gleichleistungsgrenzen H_L entsprechendem Werte H aus Fig. 15 ab, so erhält man die Gipfelhöhen (Tabelle 6), die zu fordern sind, damit beim Aussetzen eines Motors ein Weiterflug in geringer Höhe über dem Boden möglich ist.

Tabelle 6.

m	2	3	4	5	6
$H_L = 0$	4,0	2,5	1,7	1,4	1,1
$= 2$	5,2	3,8	3,1	2,8	2,5
$= 4$	6,6	5,1	4,5	4,1	3,5
$= 6$	7,8	6,5	5,5	4,3	3,5

E. Die Berechnung der Steigzeiten.

Mit Einführung des Dichteverhältnisses ε und des Leistungsverhältnisses λ erhalten wir aus Gl. (73) die größte jeweils erreichbare Steiggeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Höhe:

$$w = \frac{L_0}{G}\lambda - \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}}\right)_{\min} \cdot \frac{G^{\frac{3}{2}}}{L_0 \sqrt{\varrho_0}}. \tag{152}$$

Nun folgt für die Gipfelhöhe (Index g) aus $w = 0$:

$$\lambda_g \cdot \varepsilon_g^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}}\right)_{\min} \cdot \frac{G^{\frac{3}{2}}}{L_0 \sqrt{\varrho_0}} \tag{153}$$

und indem wir dies in Gl. (152) einführen:

$$w = \frac{L_0}{G}\left(\lambda - \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot \lambda_g \cdot \varepsilon_g^{\frac{1}{2}}\right). \tag{154}$$

Da wir w, wie aus den Dimensionen von L und G folgt, in Meter pro Sekunde, jedoch die Höhen H in km und die Steigzeiten τ in Minuten angeben, ist andererseits:

$$w = \frac{1000 \cdot dH}{60 \cdot d\tau} \tag{155}$$

und damit erhalten wir für die Steigzeiten Integrale wie folgt:

$$\tau_H = \frac{1000}{60}\int_0^H \frac{dH}{w} = k \int_0^H \frac{dH}{\lambda - \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot (\lambda\sqrt{\varepsilon})_g}, \tag{156}$$

worin:

$$k = \frac{G}{L_0} \cdot \frac{1000}{60} = \frac{G}{N_0} \cdot \frac{1}{4{,}5\,\eta_s}. \tag{157}$$

Eine unmittelbare Integration der Gl. (156) ist unmöglich. Es ist rechnerisch ersichtlich, auch nicht zulässig, wie anschauungsgemäß naheliegt, den mittleren Wert der Steiggeschwindigkeit zwischen Boden und H km Höhe (w_H Gl. (74)) einfach in die Höhe zu dividieren, um die Steigzeit zu erhalten. Denn hierzu wäre allein der zeitliche Mittelwert dienlich. Der räumliche Mittelwert gibt kleinen und großen Steiggeschwindigkeiten gleiches Gewicht, während gerade sehr kleine Steiggeschwindigkeiten natürlich einen unverhältnismäßig großen Anteil an den Steigzeiten haben. Immerhin wird die Erfüllung der Bedingung (75) immer dann, wie auch Rechnungen bestätigen, mit recht guter Näherung kürzeste Steigzeiten mit sich bringen, wenn nur die Höhen, bis zu welcher diese gefordert werden, der Gipfelhöhe nicht allzu nahe liegen. Es wäre nicht zu rechtfertigen, in Anbetracht der unvermeidlichen Unsicherheit in den Voraussetzungen (S. 28), jene Bedingung vollkommen genau, d. h. mit Bezug auf die Steigzeit selbst, aufzustellen. Denn eben weil deren unmittelbare

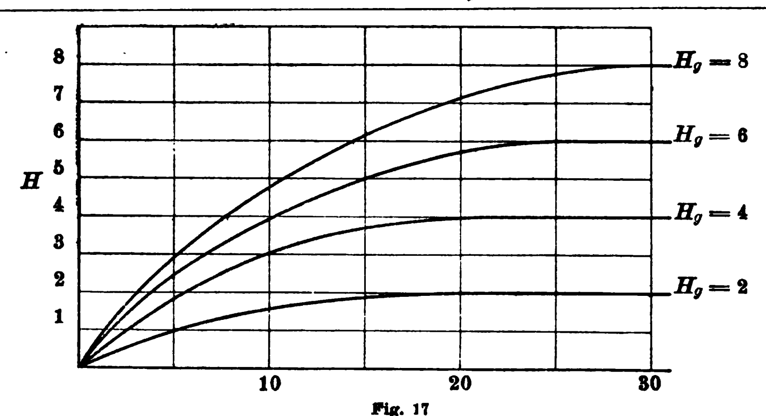


Fig. 17
zeigt bis auf einen Faktor die Steigzeiten in Abhängigkeit von der Höhe für normale Motoren.

Integration nicht möglich ist, würde diese Bedingung über Gebühr verwickelt. Wir wollen diese Integration, da sie unmittelbar nicht möglich ist, nun mit Reihenentwicklungen durchführen. Wir bezeichnen den Integranden, Gl. (156), mit:

$$f(H) = \frac{1}{\lambda - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(\lambda\sqrt{\varepsilon})_g} = \frac{1}{a\varepsilon - b\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + c}, \tag{158}$$

worin bis zur Gleichleistungsgrenze H_L des Motors mit

$$\lambda = 1 \qquad a = 0 \qquad c = 1, \tag{159}$$

darüber hinaus aber mit

$$\lambda = \frac{\varepsilon - 0{,}1}{\varepsilon_L - 0{,}1} \qquad a = \frac{1}{\varepsilon_L - 0{,}1} \qquad c = -\frac{0{,}1}{\varepsilon_L - 0{,}1} \tag{160}$$

gilt, während in beiden Fällen $b = (\lambda \cdot \sqrt{\varepsilon})_g$ bedeutet. Entwickeln wir nun $f(H)$ nach einer Taylorschen Reihe, so können wir nach der Art der Funktion schon mit wenigen Gliedern eine recht gute Annäherung an diese erwarten:

$$f(H) = f(0) + \frac{H}{1!} f'(0) + \frac{H^2}{2!} \cdot f''(0) + \frac{H^3}{3!} f'''(0)(\cdots) \tag{161}$$

$$\tau_H = k \int_0^H f(H) \cdot dH = k\left[H f(0) + \frac{H^2}{2!} f'(0) + \frac{H^3}{3!} f''(0) + \frac{H^4}{4!} f'''(0) \cdots\right]. \tag{162}$$

Diese Gleichung besteht freilich nur soweit zurecht, als die Abhängigkeit der Leistung von der Höhe stetig ist. Für Höhenmotoren ($H_L > 0$) gilt sie also nur bis zur Gleichleistungsgrenze. Darüber hinaus tritt zu dem Integral für die Gleichleistungsgrenze selbst ein zweites, das wir nach dem vorstehenden ohne weiteres hinschreiben dürfen:

$$\tau_H - \tau_{H_L} = k\left[(H - H_L)f(H_L) + \frac{(H - H_L)^2}{2!}f'(H_L) + \frac{(H - H_L)^3}{3!}f''(H_L) + \frac{(H - H_L)^4}{4!}f'''(H_L)\cdots\right].^{1)} \quad (163)$$

Für die Ableitungen erhalten wir nach Gl. (158):

$$f'(H) = \frac{1}{10}\cdot f^2(H)\left[a\left(1 - \frac{H}{50}\right)^4 + \frac{b}{2}\left(1 - \frac{H}{50}\right)^{-3,5}\right] \quad (164)$$

$$f''(H) = \frac{2}{1000}\cdot f^2(H)\left(10\cdot f(H)\left[a\left(1 - \frac{H}{50}\right)^4 + \frac{b}{2}\left(1 - \frac{H}{50}\right)^{-3,5}\right]^2 - \left[4a\left(1 - \frac{H}{50}\right)^3 - 3,5\cdot\frac{b}{2}\left(1 - \frac{H}{50}\right)^{-4,5}\right]\right). \quad (165)$$

Hierin bedeutet nach Gl. (158): $f(H_L) = \frac{1}{1 - \frac{b}{\sqrt{\varepsilon_L}}}$ (166)

und im besonderen für Gl. (162) $f(0) = \frac{1}{1 - b}$. (167)

Selbst wenn man die Reihe früh abbricht, ist danach die Berechnung der Steigzeiten, zumal in Anbetracht der Unstetigkeit der Funktion λ, so verwickelt und zeitraubend, daß man sie dem Konstrukteur nicht zumuten darf. Wir haben daher die Steigzeiten für die Gleichleistungsgrenzen $H_L = 0; 2; 4; 6$ km, und die Gipfelhöhen $H_g = 2, 4, 6, 8$ km berechnet und in Tabelle 7 sowie Fig. 17/20 eingetragen. Um die Steigzeiten zu bestimmen, hat der Konstrukteur dann jeweils nur in der Figur zu inter-

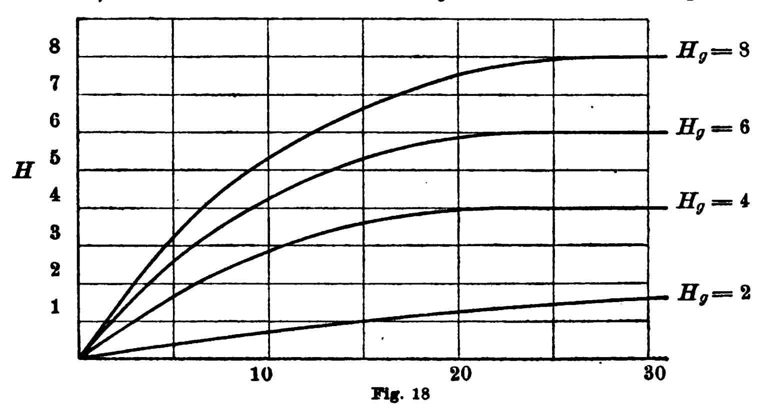


Fig. 18 zeigt bis auf einen Faktor die Steigzeiten in Abhängigkeit von der Höhe für Motoren, die durch Überverdichtung oder Vergrößerung des Hubvolumens und entsprechende Regelung der Betriebsstoffzufuhr bis $H_L = 2$ km unveränderliche Leistung besitzen (Höhenmotor).

1) Die Mac Laurinsche Form, Gl. (162), stellt, wie bekannt, nur den Sonderfall der allgemeinen Taylorschen Reihe, Gl. (163), für $H_L = 0$ dar.

polieren und die entnommenen Werte $\left(\frac{\tau}{k}\right)$ mit dem Faktor k, der wesentlich der „Leistungsbelastung" $\frac{G}{N_0}$ proportional ist, zu multiplizieren.

Bei der Berechnung der Tabelle wurde ein Verfahren angewendet, das mit geringem Müheaufwand zu recht genauen Werten führt, und das daher zur Berechnung der Steigzeiten in von unsern Voraussetzungen stark abweichenden Fällen zu empfehlen ist. Trägt man die berechneten Werte einer stetig konvergenten Reihe folgerichtig auf äquidistanten Ordinaten auf, so ergibt sich eine Kurve, die die erste der Ordinaten

Tabelle 7:

H_L	0	2	4	6	0	2	4	6
H	$H_g = 2$				$H_g = 4$			
1	5,1	14,8			2,5	2,9	6,3	
2	19,6	59,2			5,6	6,1	15,9	
3	. . . .				9,8	10,8	34,0	
4	. . . .				20,7	22,0	114,5	
H	$H_g = 6$				$H_g = 8$			
1	1,7	1,8	2,4	4,4	1,4	1,5	1,6	2,0
2	3,8	3,7	5,0	9,3	3,1	2,9	3,3	4,2
3	6.7	6,0	8,0	16,2	5,2	4,6	5,1	6,6
4	10,3	9,1	11,4	27,5	7,7	6,5	6,9	9,2
5	15,0	13,3	15,9	46,5	10,7	9,1	9,3	12,2
6	23,4	23,6	26,6	106,5	14,4	12,4	12,2	15,6
7	. . . .				19,2	16,8	16,0	19,7
8	. . . .				27,9	24,6	23,8	29,6

berührt und sich dann asymptotisch der Abszissenachse nähert. Man kann so, selbst bei mäßiger Konvergenz, und selbst wenn man von der Reihe nur jeweils die drei ersten Glieder berechnet, alle übrigen Glieder graphisch bestimmen und erhält, indem man diese den berechneten zuzählt, ein Endergebnis von einer Genauigkeit, die rein rechnerisch nur mit einem geradezu ungeheuren Zeitaufwand zu erreichen wäre. Zudem gestattet die graphische Darstellung, wie immer, Fehler der Resultate, die das Endergebnis entstellen können, festzustellen. Im vorliegenden Fall ist die Konvergenz der Reihe für die Steigzeit so vorzüglich, daß gewöhnlich die drei ersten berechneten Glieder genügen. Die graphische Extrapolation hat nur ausnahmsweise mehr als zwei weitere Glieder zu liefern. Das ist

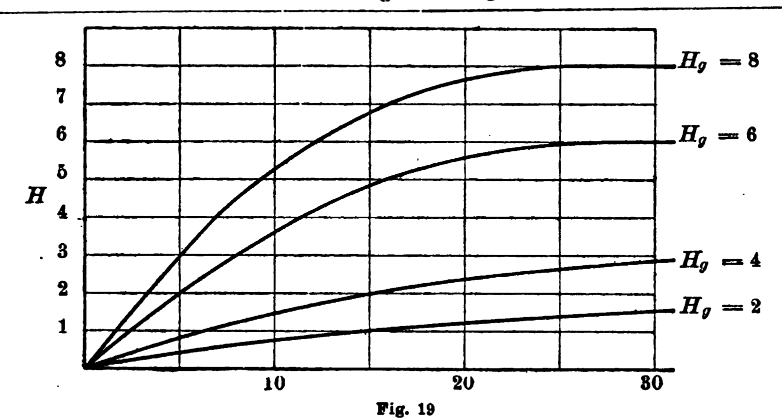


Fig. 19
zeigt bis auf einen Faktor die Steigzeit in Abhängigkeit von der Höhe für Höhenmotoren, die bis $H_L = 4$ km unveränderliche Leistung aufweisen.

nur der Fall bei denjenigen Kurven, für die die Gleichleistungsgrenze mit der Gipfelhöhe zusammenfällt oder oberhalb dieser liegt. Dann ergeben sich ungewöhnlich lange Steigzeiten. Es können eben nur ungewöhnlich ungünstige Umstände (z. B. starke Überlastung) das Übersteigen einer Höhe verhindern, in der noch die volle Bodenleistung zur Verfügung steht.

Ein Einfluß dieser Art und Richtung macht sich nun durchweg so stark geltend, daß er den günstigen Einfluß einer Erhöhung der Gleichleistungsgrenze überwiegt. Die Kurven beziehen sich eben — und das muß, um ihr Verständnis zu erleichtern, nochmals betont werden — nicht auf Veränderungen der Gleichleistungsgrenze für ein im übrigen vollkommen bestimmtes Flugzeug, sondern für eine gegebene Gipfelhöhe. Für ein gegebenes Flugzeug erhöht sich gleichzeitig mit der Gleichleistungs-

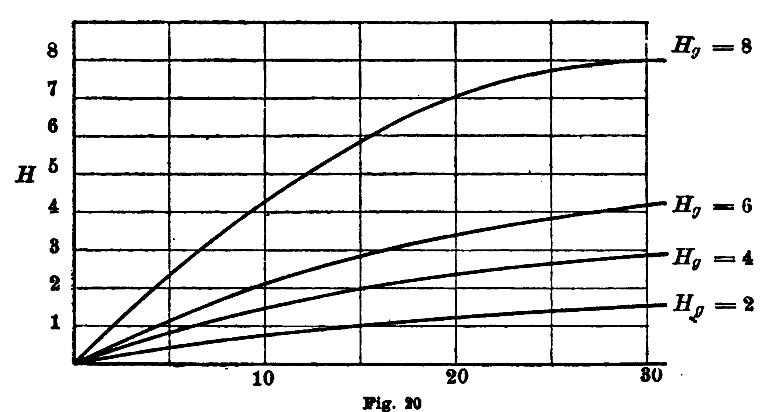


Fig. 20
zeigt bis auf einen Faktor die Steigzeiten in Abhängigkeit von der Höhe für Höhenmotoren, die bis $H_L = 6$ km unveränderliche Leistung aufweisen.

grenze auch die Gipfelhöhe. Nur in diesem Sinne ist die Verbesserung der Steigfähigkeit, die sich mit Höhenmotoren erreichen läßt, an Hand der Kurven zu beurteilen. — Die Unstetigkeit der Funktion λ, die in einem wenn auch kaum sichtbaren Knick der Steigkurve ihren Ausdruck findet, wird bei gemessenen Steigkurven natürlich nicht in dieser Weise zur Geltung kommen, denn die tatsächliche Leistungsregelung wird die Voraussetzungen unserer Rechnung nicht vollkommen erfüllen. Daneben werden sich natürlich die Abweichungen des Zustandes der Atmosphäre von dem vorausgesetzten mittleren Gleichgewichtszustand (Temperaturinversionen), und willkürliche Schwankungen in der Höhensteuerung geltend machen, wenn nicht zur Innehaltung des günstigsten Anstellwinkels eine Feststellvorrichtung des Höhensteuerknüppels angeordnet ist. Der Vollständigkeit halber geben wir noch die Formeln für die Berechnung der Gleitzeiten, die für verschwindende Leistung $\lambda = 0$ aus Gl. (156) durch direkte Integration gewonnen werden können. Die Werte des Integrals

$$\int_H^0 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \cdot dH = 20\left(1 - \varepsilon^{0,7}\right) \tag{168}$$

haben wir in Tabelle 1 dargestellt. Daraus folgen die längsten Gleitzeiten mit:

$$\bar{\tau}_H = \frac{k}{(\lambda\sqrt{\varepsilon})_g} \cdot 20\left(1 - \varepsilon^{0,7}\right). \tag{169}$$

Wir erinnern daran, daß die Ausdrücke $(\lambda\sqrt{\varepsilon})^{\frac{2}{3}}$ den Tabellen bzw. dem Diagramm, Fig. 15 entnommen werden können; daß man also damit den Wert von $\lambda \cdot \sqrt{\varepsilon}$ auf Rechenschiebern, die die zweite und dritte Potenz angeben, mit einer einfachen Einstellung des Läufers ablesen kann.

F. Die Wahl der Luftschraube.

Wie man zur Kennzeichnung der Profile die Widerstandszahl und Momentenzahl in Abhängigkeit von der Auftriebszahl darstellt, Fig. 1 u. 5, pflegt man in durchaus entsprechender Weise das Verhalten der Luftschrauben durch reine Zahlen zu charakterisieren. Als unabhängige Veränderliche wird hier das Verhältnis der Marschgeschwindigkeit v zur Umfangsgeschwindigkeit u der Blattspitze, der „Fortschrittsgrad"

$$\lambda_s = \frac{v}{u} \quad \text{betrachtet.} \tag{170}$$

Als Abhängige pflegt man anzugeben den Drehwert:

$$\mu_s = \frac{M_s}{\pi \varrho R^3 u^2}, \tag{171}$$

worin M_s das Drehmoment des Motors und R den Halbmesser der Luftschraube bezeichnet, und den Schubwert

$$\psi_s = \frac{S}{\pi \varrho R^2 u^2}. \tag{172}$$

Aus den drei Veränderlichen folgt der Wirkungsgrad der Schraube als das Verhältnis der Nutzleistung zur effektiven Motorleistung

$$\eta_s = \frac{Sv}{M_s u/R} = \frac{\psi_s}{\mu_s} \cdot \lambda_s. \tag{173}$$

Bezeichnen wir mit n die minutliche Drehzahl des Motors, so kann man die drei Beiwerte unter Einführung des Leistungsverhältnisses λ und des Dichteverhältnisses ε schreiben wie folgt:

$$\lambda_s = 2{,}65 \frac{V}{R \cdot n}, \tag{174}$$

$$(175) \qquad \mu_s = 20800 \frac{N_0}{\varrho_0 \cdot R^5 \cdot n^3} \cdot \frac{\lambda}{\varepsilon}, \quad \psi_s = 29 \cdot \frac{S}{\varrho_0 \cdot R^4 n^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (176)$$

Soll die Leistung voll ausgenutzt werden, so muß man den Motor mit seiner vollen Umdrehungszahl laufen lassen. Da nun auch die Marschgeschwindigkeit V nach einer vorläufigen Annahme für η_s durch die Leistungsberechnung des Flugzeugs bekannt ist, sind die Beiwerte λ_s und μ_s bis auf den Schraubenhalbmesser gegeben.

$$100\,\lambda_s = \frac{C_1}{R}, \quad 1000\,\mu_s = \frac{C_2}{R^5}, \tag{177}$$

$$C_1 = 265 \frac{V}{n}, \quad C_2 = 1{,}66 \cdot 10^8 \frac{N_0}{n^3} \cdot \frac{\lambda}{\varepsilon}\,^{1)} \tag{178}$$

Die Elimination von R aus diesen beiden Gleichungen gibt im Diagramm μ_s über λ_s eine Parabel 5. Grades, welche unabhängig vom Halbmesser, diejenigen Werte von λ_s und μ_s einander zuordnet, die die Betriebsbedingungen der Luftschraube erfüllen. Dabei wird man natürlich solche Werte μ_s benutzen, die einem möglichst großen Wirkungsgrad entsprechen. Die graphische Ermittlung des Schraubenhalbmessers auf dem so gekennzeichneten Weg geschieht am einfachsten in logarithmischem Maßstab, da man dann für den betrachteten Betriebszustand statt der Parabel 5. Grades eine Gerade mit Neigung 5 : 1 erhält. Der zeichnerische Vorgang ist dann folgender: Man trägt über lg $(100\,\lambda_s)$ für jede untersuchte Schraube den lg $(1000\,\mu_s)$ auf und vereinigt auf der Schar der μ-Kurven Punkte gleichen Wirkungsgrades zu einer neuen Schar von Kurven (Fig. 21 u. 22). Um nun aus den so dargestellten Versuchsergebnissen den für den gegebenen Betriebszustand günstigsten Propeller auszusuchen, trägt man über lg $(100\,\lambda_s)$ = lg C_1 den lg $(1000\,\mu_s)$ = lg C_2 auf und legt durch

---

1) Wobei $\varrho_0 = \frac{1}{8} = 0{,}125$ kg m^{-4} sk^2 gesetzt wurde.

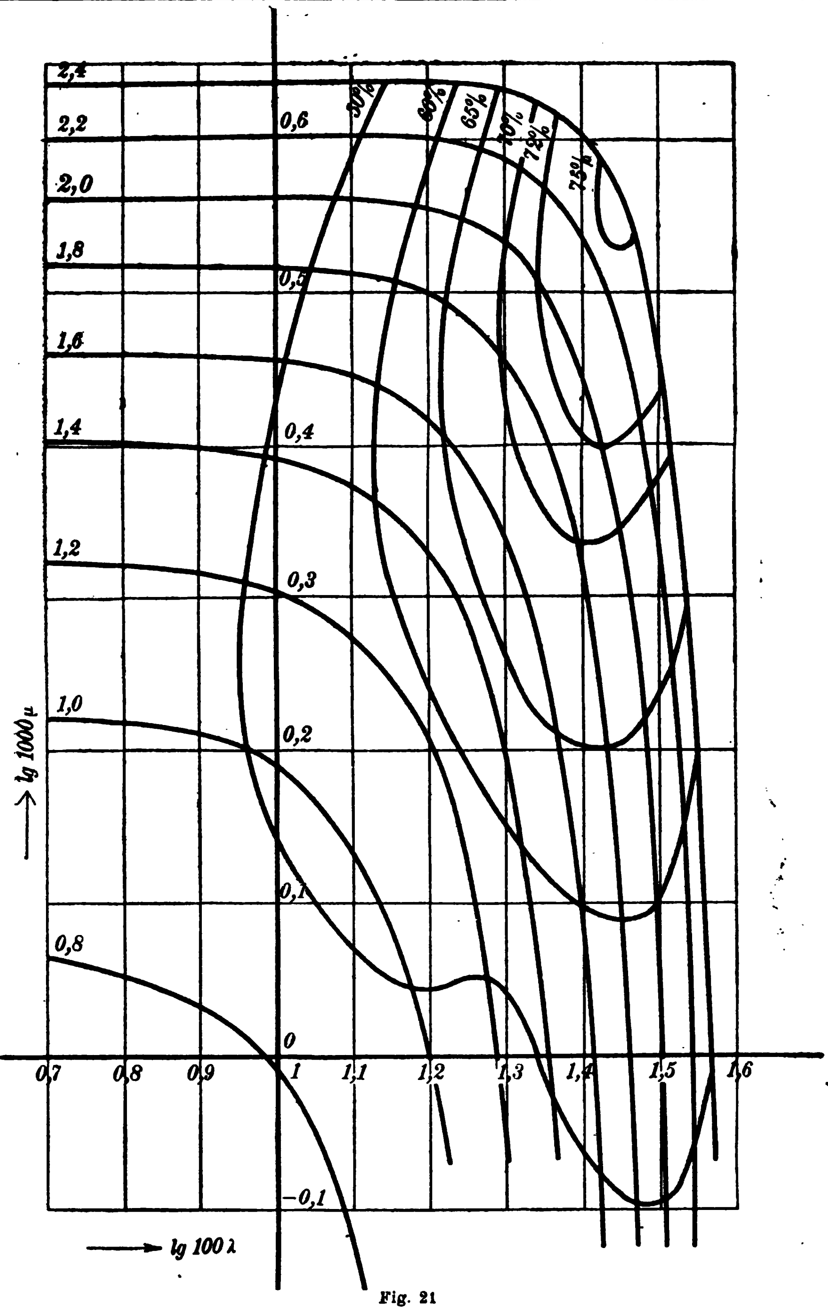


Fig. 21

zeigt Messungen mit außerordentlich genau hergestellten zweiflügligen Luftschraubenmodellen aus Bronze, die Schaffran im Wasserkanal der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau (Berlin) angestellt hat. Die Blattbreite beträgt unveränderlich 15% des Schraubenhalbmessers; der Parameter der μ-Kurve bezeichnet die unveränderliche Steigung in vielfachen des Halbmessers.

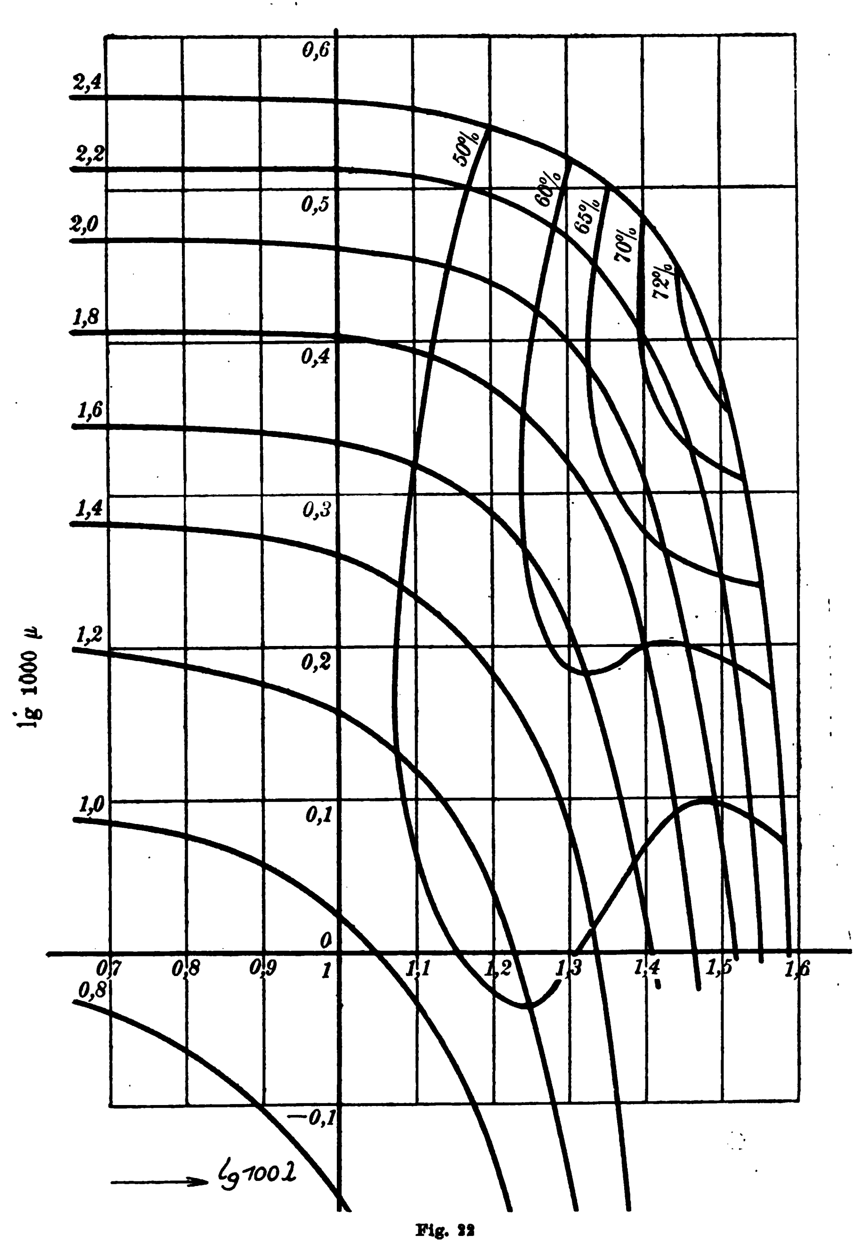


Fig. 22
zeigt Messungen Schaffrans an vierflügligen Schrauben.

diesen Punkt eine Gerade mit tangens 5:1. Dann ergibt sich $\lg R = \lg C_1 - \lg \lambda_s$ als Entfernung desjenigen Punktes auf der Geraden von der Ordinate $\lg (100 \lambda_s) = \lg C_1$, dem der höchste Wirkungsgrad zukommt. Man wird sich natürlich zu überzeugen haben, daß für andre Betriebszustände des Flugzeugs die so bestimmte Luftschraube keine allzu schlechten Wirkungsgrade aufweist; andernfalls ist ein Kompromiß unumgänglich

Dieser an sich durchaus klare, kurze und eindeutige Rechnungsgang wird nun in erheblichem Maße dadurch modifiziert, daß, wie mir Reißner mitteilt, es nicht zulässig ist, in dem Fortschrittsgrad λ_s, Gl. (170) schlichtweg die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs einzuführen. Denn die Zuströmungsgeschwindigkeit der Luft zur Schraube ist bei einem Propeller, der nicht im völlig freien Medium arbeitet, infolge des Luftwiderstandes benachbarter Bauteile erheblich geringer. So empfiehlt Reißner, auf Grund seiner Erfahrungen, zur Berechnung von λ_s die Flugzeuggeschwindigkeit um 25% bei (hinter dem Motor liegenden) Druckschrauben und um 20% bei (vor dem Motor liegenden) Zugschrauben zu vermindern. Die mit diesem Wert des Fortschrittsgrads berechneten Wirkungsgrade sind nun im Verhältnis der Flugzeuggeschwindigkeit zur Zuströmgeschwindigkeit zu vergrößern, da für die Berechnung des Wirkungsgrades natürlich nur die Nutzleistung in Betracht gezogen werden kann, wie dies in der Definition, Gl. (173), zum Ausdruck kommt. Daß man auf diese Weise unwahrscheinlich große Werte des Wirkungsgrades erhält, muß dadurch rechnerisch wieder richtig gestellt werden, daß man den Widerstand jener Bauteile, die im Bereich von Zu- und Abstrom der Luftschraube liegen, in entsprechendem Maße erhöht. Denn eben dieser Widerstand ist es, der der Luft einen Impuls in der Flugrichtung erteilt, also „Vorstrom" erzeugt, und dadurch die Zuströmungsgeschwindigkeit für die Schraube herabsetzt. Je stärker also der Vorstrom ist, um so größer wird zwar der Wirkungsgrad, aber um so größer muß auch der Widerstand sein, der diesen Vorstrom erzeugen kann. Die Unsicherheit der damit verbundenen Abschätzungen überträgt sich natürlich auf die Berechnung der Schraube und in noch höherem Maße auf die ihrer Wirkungsgrade.

G. Der Schraubenwind.

Die Wirkungsgrade der Luftschrauben sind überhaupt sehr gering und übersteigen nur ausnahmsweise 75%. Das ist durch die mechanischen Verhältnisse bedingt. Da man zur Erzeugung einer Vortriebskraft darauf angewiesen ist, einer bestimmten Luftmenge eine Bewegungsgröße zu erteilen, ist in der Leistungsbilanz die dieser Bewegungsgröße entsprechende kinetische Energie der Luft als Verlust zu buchen. Durch die Vorwärtsbewegung des Flugzeugs tritt eine Luftmenge von $\varrho \cdot g \cdot \pi \cdot R^2 \cdot v$ kg/sk

durch den Schraubenkreis und wird durch das Schraubenblatt auf eine Eigengeschwindigkeit u' beschleunigt. Diese Bewegungsgröße fordert vom Schraubenblatt einen Impuls von:

$$S = \varrho \cdot \pi R^2 \cdot v \cdot u' \text{ kg} \tag{179}$$

und die in der Sekunde erzeugte kinetische Energie beträgt:

$$\varrho \cdot \pi R^2 \cdot v \cdot \frac{u'^2}{2} = S \cdot \frac{u'}{2} \text{ kg m/sk.} \tag{180}$$

Der gesamte Leistungsaufwand ist also $S \cdot \left(v + \frac{u'}{2}\right)$, wovon nur $S \cdot v$ nutzbar ist. Daraus ergibt sich als höchster überhaupt erreichbarer Wirkungsgrad, wenn wir mit

$$\vartheta = \frac{u'}{v} \quad \text{bezeichnen,} \tag{181}$$

$$\eta' = \frac{v}{v + \frac{u'}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\vartheta}{2}}. \tag{182}$$

Berücksichtigt man, daß noch weitere Verluste auftreten durch den Drehungswiderstand der Schraube, der Verwirbelung der Luft und eine leichte Verdrehung des ganzen Schraubenstrahls im Sinne der Umlaufrichtung zur Folge hat, so ist ausreichend erklärt, warum gemessene Wirkungsgrade so gering sind. Man bezeichnet das Verhältnis des Wirkungsgrades zum höchsten erreichbaren Wirkungsgrad als Gütegrad. Dieser Gütegrad liegt bestenfalls bei 90%.

Ein mit dem Flugzeug fest verbundener Körper, der im Schraubenstrahl liegt, ist einer Luftgeschwindigkeit $v + u'$ ausgesetzt und erfährt dementsprechend höheren Widerstand. Denn dieser wächst mit

$$(v + u')^2 = v^2 (1 + \vartheta)^2. \tag{183}$$

Um nun die Größe ϑ zu bestimmen, kehren wir zu den Gleichgewichtsbedingungen (56) (57) zurück:

$$\frac{L}{G} - \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}} \cdot v = w \tag{184}$$

und führen hier den Impuls des Schraubenschubs

$$S = \varrho \cdot \pi R^2 \cdot v^2 \cdot \vartheta \tag{185}$$

und Gl. (56) abermals ein unter der Voraussetzung, daß der Antrieb durch z Schrauben erfolgt; dann erhalten wir:

$$z \cdot \frac{S}{G} \cdot v - \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}} \cdot v = w, \tag{186}$$

$$\vartheta = \frac{1}{z \cdot \pi R^2} \left(\mathfrak{X} + \frac{w}{v} \cdot \mathfrak{Y}\right). \tag{187}$$

Dieser Wert ist bei der Berechnung des schädlichen Widerstandes im Strahle liegender Teile ohne weiteres zu verwenden. Denn ich habe durch Messungen der Luftgeschwindigkeit im Fluge gefunden, daß dieser Wert nicht allein der Größe nach zutrifft, sondern auch tatsächlich, wie es die Theorie des Vortriebs voraussetzt, die Geschwindigkeit im ganzen Querschnitt des Strahls nahezu dieselbe ist, und daß man als Querschnitt des Strahls für die übliche Länge der Flugzeuge hinreichend genau den Schraubenkreis selbst ansprechen kann. Denn wenn auch der Schraubenstrahl sich hinter dem Schraubenkreis bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit einschnürt (Lit. 7), so bringt doch die Reibung des Strahls an seinem Umfang eine allmähliche Erweiterung mit sich. Bei Zugschrauben kommt hinzu, daß der hinter der Schraube liegende Motor den Strahl von der Achse aus auseinander treibt.

H. Der Einfluß des Schraubenwirkungsgrades auf die Flugleistung.

Da wir oben unter Voraussetznng eines unveränderlichen Wirkungsgrades und unveränderlicher Drehzahl der Luftschraube die Höchstgeschwindigkeit in verschiedenen Höhen berechnet haben, so bedürfen diese Werte nunmehr der Korrektur, entsprechend den Werten des Wirkungsgrades η_s und des Drehwerts μ_s, wie sie der schließlich gewählten Luftschraube bei den durch die endgültige Geschwindigkeit und der endgültigen Drehzahl bestimmten λ_s zukommen. Die Voraussetzung unveränderlicher Drehzahl bedeutete, da das Motordrehmoment nach Gl. (175) mit λ, die Luftdichte aber mit ε abnimmt, daß μ_s lediglich λ direkt und ε umgekehrt proportional sei, und daß λ_s ausschließlich der Geschwindigkeit proportional sei. Wir tragen nun in dem Diagramm (Fig. 23), in dem bereits lg μ_s über lg λ_s dargestellt ist, für die gewählte Schraube auch die Kurve lg η_s und dann die angenommenen Werte μ_s bzw. η_s über den zugeordneten angenommenen λ_s punktweise ein. Der angenommene unveränderliche Wert von η_s liefert eine Wagerechte lg η_s. Die unveränderlich angenommene Drehzahl bestimmt mit der Geschwindigkeit V, wie sie das Geschwindigkeitsdiagramm liefert, für jede Flughöhe vorläufig λ_s und über diesem λ_s sind die lg μ_s nach Gl. (175) aufzutragen. Diese Annahmen sind nun mit den durch λ_s koordinierten, in den Kurven dargestellten Werten von η_s und μ_s, wie sie dem tatsächlichen Verhalten der Luftschraube entsprechen, in Beziehung zu bringen.

Entsprechend den Annahmen über Leistungs- und Dichteabnahme, wie wir sie von vornherein in die Rechnung eingeführt haben, kann sich μ_s von seinem angenommenen Wert nur infolge einer Drehzahländerung unterscheiden. Nach Gl. (171) ist also:

$$\frac{d\mu}{\mu} = -2\frac{dn}{n}. \quad (188)$$

Diese Drehzahländerung bestimmt zusammen mit dem Unterschied der endgültigen und der berechneten Geschwindigkeit nach Gl. (174):

$$\frac{d\lambda_s}{\lambda_s} = \frac{dV}{V} - \frac{dn}{n}. \quad (189)$$

Die Änderungen des Nutzleistungsverhältnisses λ mit Wirkungsgrad und Drehzahl finden in der der Geschwindigkeitsberechnung zugrunde liegenden Gleichung (142) ihren Ausdruck mit:

$$\mathfrak{G}\frac{\lambda}{\varepsilon}V\left(\frac{d\eta_s}{\eta_s} + \frac{dn}{n} + \frac{dV}{V}\right) = 4V^4\frac{dV}{V}. \quad (190)$$

Bezeichnet:

$$c = \frac{4V^3}{\mathfrak{G}\frac{\lambda}{\varepsilon}} - 1, \quad (191)$$

so ist mit Gl. (188) und (189):

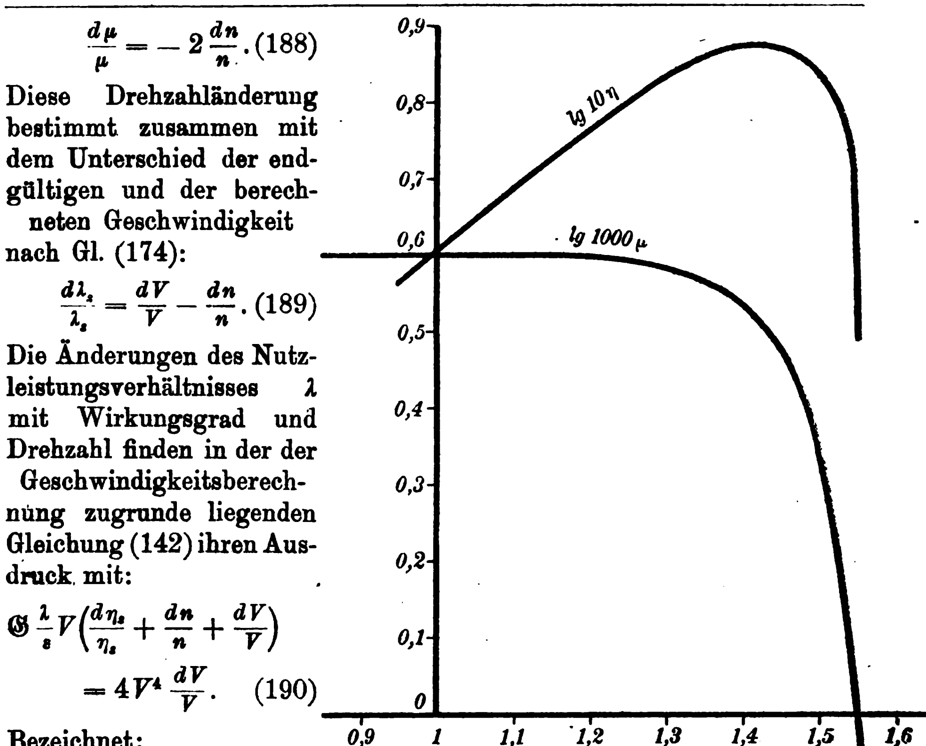


Fig. 23 zeigt lg 10 η und lg 1000μ über log 100 λ nach den Versuchen von Schaffran für eine zweiflüglige Schraube von einer Steigung = 2,2 des Halbmessers und Blattbreite = 0,15 des Halbmessers.

$$\frac{d\eta_s}{\eta_s} = c\frac{d\lambda_s}{\lambda_s} - \frac{c-1}{2}\frac{d\mu_s}{\mu_s}. \quad (192)$$

Schreiben wir die verhältnismäßigen Änderungen:

$$\frac{dx}{x} = d\ln x. \quad (193)$$

Dann gilt mit Briggschen Logarithmen auch für endliche Änderungen genau genug:

$$\frac{\Delta \lg \eta_s}{\Delta \lg \lambda_s} = c - \frac{c-1}{2}\cdot\frac{\Delta \lg \mu_s}{\Delta \lg \lambda_s}. \quad (194)$$

Man hat also von dem Punkte, wie er den angenommenen Werten μ_s und λ_s entspricht, im Diagramm eine Gerade unter einer willkürlich gewählten Neigung $\frac{\Delta \lg \mu_s}{\Delta \lg \lambda_s}$ bis zum Schnitt mit der Drehwertkurve der

Schraube, eine andere Gerade von dem Punkt η_s, λ_s mit der durch Gl. (194) aus $\frac{\Delta \lg \mu_s}{\Delta \lg \lambda_s}$ bestimmten Neigung $\frac{\Delta \lg \eta_s}{\Delta \lg \lambda_s}$ bis zum Schnitt mit der Wirkungsgradkurve der Schraube zu ziehen, dann müssen, wenn $\frac{\Delta \lg \mu_s}{\Delta \lg \lambda_s}$ richtig gewählt war, die beiden Schnittpunkte senkrecht übereinander liegen, d. h. einem und zwar dem endgültigen Wert λ_s angehören, aus dem sich dann mit Gl. (188) u. (189) die endgültigen Werte von Geschwindigkeit und Drehzahl bestimmen lassen.

J. Einfluß geringer Unterschiede gegenüber den Voraussetzungen.

Gelegentlich der Konstruktion von Einzelteilen ist oft eine Entscheidung zu fällen, welches von zwei in Hinsicht auf die Festigkeit gleichwertigen Bauelementen in bezug auf die Leistung des Flugzeuges den Vorzug verdient. Sind Gewicht und „schädlicher“ Widerstand eines Elements zugleich größer, so läßt sich die Wahl ohne weiteres treffen. Ist aber für ein Element das Gewicht größer ($\Delta G > 0$) und der Widerstand kleiner ($\Delta \mathfrak{S} < 0$), so hängt die Entscheidung von einer kurzen Rechnung ab.

Hierzu differenzieren wir für eine gegebene Flughöhe: $H = \text{const.}$ Gl. (137) und Gl. (138) und erweitern ihre Gültigkeit auf kleine endliche Differenzen:

$$\frac{\Delta G}{G} - \frac{\Delta \mathfrak{Y}}{\mathfrak{Y}} - 2\frac{\Delta V}{V} = 0 \qquad (195) \qquad\qquad \frac{\Delta \mathfrak{X}}{\mathfrak{X}} + 3\frac{\Delta V}{V} = 0. \qquad (196)$$

Innerhalb des Bereichs der quadratischen Abhängigkeit des induzierten Widerstandes vom Auftrieb gibt uns Gl. (53) mit Gl. (146) für unveränderte Zellenabmessungen $\Delta \mathfrak{P} = 0$:

$$\frac{\Delta \mathfrak{X}}{\mathfrak{X}} = \frac{\Delta \mathfrak{S}}{\mathfrak{X}} + 2\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{X}} \cdot \frac{\Delta \mathfrak{Y}}{\mathfrak{Y}} \qquad (197)$$

und indem wir diesen Wert in Gl. (196) einführen und $\Delta \mathfrak{Y}$ mit Gl. (195) eliminieren, erhalten wir

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \mathfrak{S} + 2\mathfrak{J} \cdot \frac{\Delta G}{G}}{4\mathfrak{J} - 3\mathfrak{X}}. \qquad (198)$$

Dann entscheidet das Vorzeichen von ΔV die Wahl des Bauelements. $\Delta \mathfrak{S}$ und ΔG haben voraussetzungsgemäß verschiedene Vorzeichen. Der Nenner ist, wie wir bei Gl. (147) feststellten, negativ. Der Einfluß der Gewichtsdifferenz ist bei größeren Anstellwinkeln größer als bei kleinen. Das gilt auch, wie Gl. (198) für $\Delta \mathfrak{S} = 0$ zeigt, für Unterschiede in der Nutzlast des Flugzeugs:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\frac{\Delta G}{G}}{\frac{3}{2}\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Z}} - 2}. \tag{199}$$

Da nun für große Anstellwinkel meist $2 < \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Z}} < 4$ ist

$$-\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\frac{\Delta G}{G}} = \frac{1}{4} \text{ ./. } 1. \tag{200}$$

Die quadratische Abhängigkeit des induzierten Widerstandes vom Auftrieb wird begrenzt durch den Größtwert von $\mathfrak{Y}$, der, wie wir oben zeigten, den Kleinstwert für $\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}$ mit sich bringt. Wir erhalten mit $\left(\frac{\mathfrak{X}^2}{\mathfrak{Y}^3}\right)_{\min}$ die Gipfelhöhe aus Gl. (151) und können daraus andererseits folgern, welchen Einfluß eine geringe Änderung der Nutzlast auf die Gipfelhöhe und damit nach Gl. (156) auch auf die Steigzeiten hat.

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{2}{3}\frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{1}{3}\frac{\Delta s}{s}. \tag{201}$$

Differenziert man Gl. (130) und (135), so ergibt sich

$$\frac{\Delta s}{s} = -\frac{\Delta H}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{H}{50}} \tag{202}$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta s}{s - 0{,}1} \tag{203}$$

und damit aus Gl. (201):

$$\Delta H_g = -\frac{s_g - 0{,}10}{s_g - 0{,}033} \cdot \frac{50 - H_g}{50} \cdot 10 \cdot \frac{\Delta G}{G}. \tag{204}$$

Für $H_g = 4$ bzw. 8 km wird danach $\Delta H_g = -8{,}2$ bzw. $6{,}9 \frac{\Delta G}{G}$, d. h.: Völlig unabhängig von Flugzeugtyp und Motortyp[1]) nimmt für jedes Hundertstel Überlastung $\Delta G = +0{,}01\, G$ die Gipfelhöhe um etwa 75 m ab.

IV. Die Berechnung von Höhensteuer und Schwerpunktslage.

A. Die Berechnung des Moments der Luftkräfte eines Eindeckers mit Flosse.

Die nach Kap. II berechneten Dimensionen der Zelle liefern Gleichgewicht der Kräfte nach Größe und Richtung. Man könnte sich dessen auch der Lage nach versichern dadurch, daß man einfach die Last in der Zelle so anordnet, daß der gemeinsame Schwerpunkt in den Schnittpunkt

1) Wenn nur die Voraussetzung erfüllt ist, daß die effektive Motorleistung bei 10 Prozent der Bodendichte gerade verschwindet.

von Luftkraft und Schraubenschub gelangt. Dies Gleichgewicht ist jedoch ausgesprochen labil.

Denn bei einer Vergrößerung des Anstellwinkels rückt die Luftkraft nach vorn, bei einer Verkleinerung nach hinten. Eine Lagenstörung, wie sie selbst beim stetigen Flug allein durch den Eintritt des Flugzeugs in eine anders gerichtete Luftströmung (Boe, Luftloch, Überfliegen von Waldrändern, Bodenerhebungen) erfolgen kann, wird sich also immer mehr vergrößern und somit zum Absturz führen.

Man hat früher geglaubt, zur Bekämpfung der durch diese Labilität bedingten Gefahr den Führer oder zum mindesten einen Automaten heranziehen zu müssen, um durch ihn Momente zum Ausgleich der Labilität wachzurufen. Das ist keineswegs erforderlich. Es genügt, eine kleine Fläche von bestimmtem Mindestausmaß in bestimmter Lage vor oder hinter der Zelle anzuordnen und mit dieser, z. B. durch den Rumpf, starr zu verbinden. Je nach der Lage der Flosse vor oder hinter der Zelle unterscheidet man Kopf- und Schwanzflosse. Um eine Anschauung von der stabilisierenden Wirkung der Flosse zu gewinnen, ist es zweckmäßig, zunächst die Beziehungen algebraisch darzustellen. Wir betrachten vorläufig den einfachsten Fall, der auch für den allgemeinsten durchaus charakteristisch ist: Ein Eindecker mit unveränderlicher Flügeltiefe (Fläche F_T) ohne Pfeilform, bei dem Richtung von Rücktrieb und Schub durch den Schwerpunkt gehen. Wir nennen Momente positiv, die im Sinne einer Vergrößerung des Anstellwinkels wirken.

Bezeichnet d den Abstand der Tragflügelhinterkante und l den des „Flossendruckpunktes“[1]) von der Schwerpunktsquerachse (positiv vor), so ist für diese das Moment der Luftkräfte

$$M_q = \varrho v^2 [\eta_T F_T d + \zeta F_T \cdot t_T + \eta_F F_F l]. \tag{205}$$

Führen wir hierin die oben angegebene lineare Abhängigkeit der Momentenzahl von der Auftriebszahl ein, so ergibt sich:

$$M_q = \varrho v^2 [\eta_T F_T (d + \chi t_T) - \varphi F_T \cdot t_T + \eta_F F_F l]. \tag{206}$$

Von dem so gekennzeichneten Gleichgewicht ist zum mindesten zu fordern, daß es, wenn auch nicht stabil, so doch indifferent, keinesfalls aber labil ist. Um dies entscheiden zu können, haben wir die Momentenbedingung (206) nach dem Anstellwinkel β_T des Tragflügels abzuleiten[2]) und erhalten:

---

1) Unter „Druckpunkt“ versteht man den Punkt einer Fläche, durch den die Resultierende der Luftkräfte geht, für den also ihr Moment verschwindet. Vgl. S. 11.

2) Winkel werden, wie schon aus Gl. (3) und (17) hervorgeht, in allen algebraischen Rechnungen ausschließlich im Bogenmaß angegeben. Alle Ableitungen nach Winkeln werden also auf die Bogeneinheit bezogen.

$$M_q' = \varrho v^2 \left[\eta_T' \cdot F_T(d + \chi t_T) + \eta_F' \frac{d\beta_F}{d\beta_T} F_F l \right] \cdot \tag{207}$$

Im besondern fordert Indifferenz $M_q' = 0$:

$$-\frac{d}{t_T} = \chi + \frac{\eta_F'}{\eta_T'} \cdot \frac{d\beta_F}{d\beta_T} \cdot \frac{F_F l}{F_T \cdot t_T} \cdot \tag{208}$$

Hierin sind alle Größen für den ganzen Bereich der linearen Beziehungen zwischen Anstellwinkeln, Auftriebs- und Momentenzahlen, einschließlich der Ableitung der Anstellwinkel nacheinander $\frac{d\beta_F}{d\beta_T}$, unveränderlich, d. h. unabhängig vom Anstellwinkel. Die mit Gl. (208) bestimmte Schwerpunktslage gewährt also Indifferenz des Gleichgewichts für das ganze flugtechnisch wichtige Gebiet der Anstellwinkel. Man hat nur durch entsprechende Anstellung der Flosse dafür zu sorgen, daß bei irgendeinem Anstellwinkel Gleichgewicht besteht, so ist es ohne weiteres bei jedem Anstellwinkel vorhanden. Hierfür wählen wir der Einfachheit halber den Anstellwinkel, bei dem der Auftrieb des Tragflügels verschwindet und bezeichnen die entsprechende Auftriebszahl der Flosse mit Index 0.

$$\eta_{F_0} = \varphi \frac{F_T \cdot t_T}{F_F \cdot l} \cdot \tag{209}$$

Für Kopfflossen wird mit l also auch η_{F_0} positiv, für Schwanzflossen negativ. Dies ist ja auch anschaulich ohne weiteres verständlich. Bei verschwindendem Auftrieb äußern die Luftkräfte am Flügel lediglich ein negatives Moment. Und um diesem entgegen zu wirken, ist ein positives Moment aufzubringen, das eine Kopfflosse bei positivem, eine Schwanzflosse bei negativem Auftrieb leistet. Für verschwindenden Auftrieb des Tragflügels, wie er erst bei negativen Anstellwinkeln desselben (0,05 bis 0,15) eintritt, müssen also Kopfflossen bereits positive, Schwanzflossen negative Auftriebszahlen aufweisen. Und um diese mit möglichst kleinem Widerstand zu erkaufen, hat man die Kopfflosse nach oben, die Schwanzflosse nach unten zu wölben; in jedem Fall aber der vorderen Fläche, sei es nun die Flosse oder der Tragflügel, einen größeren Anstellwinkel zu geben. Wir wollen den Unterschied der Anstellwinkel, der natürlich bei einer gegebenen Konstruktion ohne weiteres unveränderlich ist, Schränkungswinkel nennen und mit σ bezeichnen. Um an Widerstand und an Gewicht zu sparen, wird man die Flosse möglichst klein machen, indem man η_{F_0} möglichst groß wählt. Ohne weiteres die ärodynamisch erreichbaren Größtwerte für η_{F_0} zu nehmen, ist jedoch, wie wir später sehen werden, nicht zulässig. Bei entsprechender Vorsicht

in der Wahl von η_{F_0} genügt jedenfalls Gl. (209) zur Bestimmung der Abmessungen,

$$F_F = \frac{\varphi}{\eta_{F_0}} \cdot \frac{t_F}{l} \cdot F_T \tag{210}$$

η_{F_0} selbst zur Bestimmung des Querschnitts und Anstellwinkels der Flosse. Und damit ist dann auch die Schwerpunktslage für indifferentes Gleichgewicht gegeben:

$$-\frac{d_*}{t} = \chi + \frac{\eta_F'}{\eta_T'} \cdot \frac{d\beta_F}{d\beta_T} \cdot \frac{\varphi}{\eta_{F_0}}. \tag{211}$$

Die Aufhebung der natürlichen Labilität des Tragflügels geschieht dabei grundsätzlich verschieden, je nachdem, ob die Flosse vor oder hinter dem Tragflügel liegt. Kopfflossen tragen an sich natürlich nur noch zur Labilität bei, gewähren aber dem Auftrieb des Tragflügels so große negative Hebelarme, daß die Änderungen seiner Größe zur Aufhebung der Labilität hinreichende Momente liefern können. Schwanzflossen leisten hingegen die Stabilisierung unmittelbar in der Art einer Windfahne, wenn nur der Schwerpunkt weit genug vorn liegt. Dieser Unterschied in der Wirksamkeit veranlaßt uns, beide Typen nunmehr getrennt zu betrachten.

B. Die Stabilisierung durch Kopfflossen.

Bei Kopfflossen können wir annehmen, daß die Ablenkung der Strömung nach unten, die die Kopfflosse für den Tragflügel hervorbringt (Fig. 24), wesentlich nur von dem tragenden Wirbel der Flosse selbst herrührt und sich nur über deren Spannweite erstreckt. Denn die Randwirbel der Flosse, die für den hinter der Flosse liegenden Teil des Tragflügels die Ablenkungen natürlich vergrößern, werden für die äußeren Enden des Tragflügels eine Ablenkung der Strömung nach oben zur Folge haben, und es ist anzunehmen, daß sich beide Wirkungen im wesentlichen ausgleichen. Wir haben dann lediglich die Ablenkung für den mittleren Teil der Tragfläche mit dem Verhältnis der Spannweite von Flosse und Tragflügel zu reduzieren, um so einen Mittelwert für die ganze Tragfläche zu gewinnen:

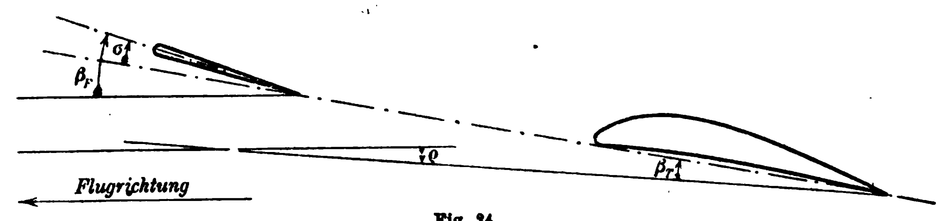


Fig. 24.
zeigt die Ablenkung der Strömung für einen Tragflügel durch eine vorgelagerte Flosse.

$$(212)\quad \varrho_F = \frac{\eta_F \cdot t_F}{2\pi l} \cdot \frac{b_F}{b_T} \qquad \varrho'_F = \frac{d\varrho}{d\alpha_F} = \frac{\eta'_F \cdot t_F}{2\,\pi l} \cdot \frac{b_F}{b_T} = \frac{\eta'_F}{2\pi} \cdot \frac{F_F}{F_T} \cdot \frac{t_T}{l} \cdot \quad (213)$$

Nun ist für Kopfflossen nach Fig. 24:

$$\beta_F = \beta_T + \varrho + \sigma \tag{214}$$

und die Ableitung nach β_F liefert:

$$(215)\qquad 1 = \frac{d\beta_T}{d\beta_F} + \varrho'_F \qquad \frac{d\beta_F}{d\beta_T} = \frac{1}{1 - \varrho'_F} \cong 1 + \varrho'_F. \qquad (216)$$

Da η'_F etwa bei $\frac{\pi}{2}$, $\frac{l}{t_T}$ gewöhnlich bei 3 liegt, ist selbst für große Kopfflossen $\frac{d\beta_F}{d\beta_T}$ nur wenige Hundertstel größer als Eins. Der Einfluß der Strömungsablenkung, die natürlich an sich eine nicht unbeträchtliche Steigerung des induzierten Tragflügelwiderstandes mit sich bringt, ist also in Hinsicht des Momentenausgleichs ohne Bedeutung. Nun folgt aus Gl. (206), (208) und (209)

$$\eta_F = \eta_{F_0} + \frac{\eta'_F}{\eta'_T} \cdot \frac{d\beta_F}{d\beta_T} \cdot \eta_T \cdot \tag{217}$$

Führt man hierin für die Auftriebszahlen ihre „zulässigen" Größtwerte ein, so ergibt sich

$$\eta_{F_0} = \eta_{F\,\text{zul}} - \frac{\eta'_F}{\eta'_T} \cdot \frac{d\beta_F}{d\beta_T}\, \eta_{T\,\text{zul}} \cdot \tag{218}$$

Damit also trotz der Vor-Anstellung der Flosse (Schränkung) Tragflügel und Flosse gleichzeitig ihre größten zulässigen Anstellwinkel erreichen, genügt es, wie aus konstruktiven Gründen ohnedies naheliegt, der Flosse ein kleineres Seitenverhältnis zu geben als dem Tragflügel, denn mit dem Seitenverhältnis nimmt der Wert von η' stark ab (Fig. 5), und man erhält für das η' der Flosse schon den halben Wert als für den Tragflügel, wenn die Seitenverhältnisse $\frac{b}{t}$ z. B. 1 bzw. 12 betragen. Die Größtwerte der erreichbaren Auftriebszahlen sind jedoch vom Seitenverhältnis nahezu völlig unabhängig. Um η_{F_0} abzuschätzen, können wir annehmen, daß wir von diesen erreichbaren Größtwerten für die Flosse in Rücksicht auf die Längssteuerung (S. 107) ebensoweit entfernt bleiben müssen, wie für die Tragflügel in Rücksicht auf die Seitenstabilität (S. 119). Wenn zudem die zugehörigen η' sich wie 1 zu 2 verhalten, so beträgt nach Gl. (218) $\eta_{F_0} \cong \frac{\eta_{\text{zul}}}{2}$. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich aus Gl. (210), wenn wir $\frac{l}{t_T} = 3$ und für günstige Profile $\varphi = 0{,}05$ $\eta_{\text{zul}} \doteq 0{,}5$ annehmen, $F_F = \frac{F_T}{15}$ und nach Gl. (211) $-\frac{d_*}{t_T} \cong 0{,}85$, da

nach Gl. (15) $\chi = \frac{3}{4}$. Der Schwerpunkt darf also unter diesen Voraussetzungen für Indifferenz noch hinter der Tragflügelvorderkante, und zwar in etwa $1/_7$ der Tragflügeltiefe, liegen. Es ist aber unbedingt notwendig, sich von Fall zu Fall genau über die Werte φ und η' Rechenschaft zu geben, um nicht Gefahr zu laufen, labile Verhältnisse herbeizuführen. Auch muß, wie gesagt, die größte erreichbare Auftriebszahl der Flosse dem größten zulässigen Anstellwinkel des Tragflügels entsprechen. Denn wenn die Flosse den Höchstwert ihrer Auftriebszahl erreicht, tritt auch keine weitere Steigerung des positiven Moments der Flosse ein, d. h. die Indifferenz hört auf, und das negative Moment des Tragflügels wird stabilisierend den Anstellwinkel wieder herstellen, bei dem die Flosse den Höchstwert ihrer Auftriebszahl erhält. Dann ist also auch eine Steigerung der Auftriebszahl des Tragflügels über dem diesem Winkel entsprechenden Betrag nicht möglich. Einen einfachen Überblick über diese Verhältnisse gewinnt man, indem man in dem Momentendiagramm ζ über η (Fig. 1) die Gerade einträgt, die der Schwerpunktslage entspricht (Fig. 25). Dann sind die Abschnitte zwischen dieser Geraden und der Momentengeraden ζ der Flossenauftriebszahl η_F proportional. Im besonderen erhält man für die Schwerpunktslage der Indifferenz diejenigen Flossenauftriebszahlen, die sich allein durch die Anstellwinkeländerung unter Berücksichtigung der Strömungsablenkung einstellen.

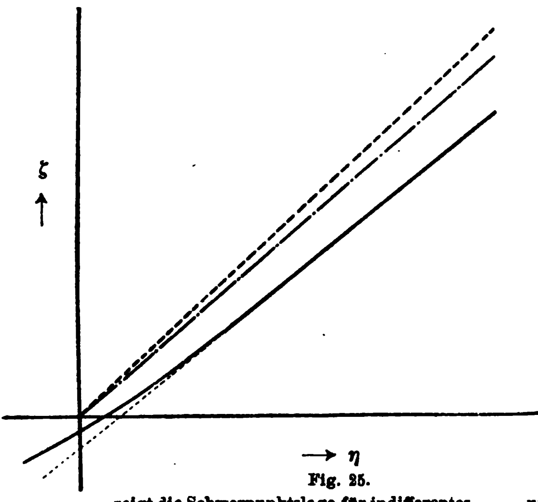


Fig. 25.
zeigt die Schwerpunktslage für indifferentes — · — und für stabiles — — Gleichgewicht bei der Stabilisierung durch eine Kopfflosse.

C. Die Umwandlung der Flosse in ein Steuer.

Nun nimmt M_q nach Gl. (207) einen negativen Wert an, d. h. das Gleichgewicht wird stabil, wenn d kleiner[1]) ist als der durch Gl. (208) angegebene Betrag; der Schwerpunkt also weiter vorn liegt. Dann überwiegen infolge der Vergrößerung der Hebelarme die negativen (stabilisierenden) Momente des Tragflügels die positiven labilisierenden der Flosse. Wird d kleiner[1]), so erhält die entsprechende Gerade $\frac{d}{t_T} \cdot \eta$ im

1) Dem absoluten Betrag nach also größer, da d notwendig negativ ist.

Momentendiagramm eine größere Tangente (Fig. 25). Um große Anstellwinkel zu erreichen, muß man also die Flossenauftriebszahlen noch über die Werte steigern, die von selbst aus der Lagenänderung hervorgehen. Das einfachste Mittel hierzu scheint zunächst dem Führer eine Vorrichtung zur Hand zu geben, durch die er willkürlich den Anstellwinkel der Flosse ändern kann. Dann müßte er, um den Anstellwinkel des Tragflügels zu steigern, auch diesem gegenüber den Anstellwinkel der Flosse, d. h. die Schränkung, vergrößern und erhält dann, auch in

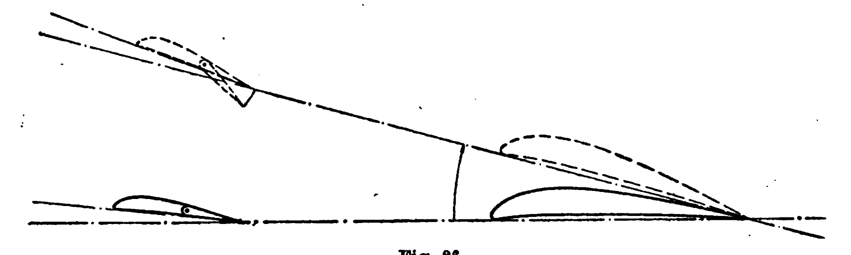


Fig. 26.
zeigt die Anordnung einer gewölbten Fläche als Kopfflosse ——————— und ihre Verwendung als Höhensteuer zwecks Vergrößerung des Anstellwinkels — — — — —.

der neuen Lage, stabiles Gleichgewicht. Das Gleichgewicht fordert dann eben für jeden Anstellwinkel des Tragflügels eine andere Schränkung zwischen diesem und der Flosse.

Die Änderung des Anstellwinkels der Flosse fordert, diese drehbar zu lagern. Das führt zu schwerfälligen Konstruktionen. Konstruktiv viel einfacher ist es, den vorderen Teil der Flosse mit dem Tragflügel starr zu verbinden und an seiner Hinterkante den anderen Teil, den wir fortan „Ruder" nennen, drehbar anzuordnen. Eine Drehung des Ruders bewirkt dann durch die Lagenänderung der Hinterkante des Ruders gegenüber der Vorderkante der Flosse nicht nur eine Änderung des meßbaren Anstellwinkels, sondern vor allem eine Querschnittsänderung des Steuers, wenn wir als solches die ärodynamisch untrennbare Einheit von Flosse und Ruder bezeichnen. Man erhält so eine Fläche mit veränderlicher Wölbung (Fig. 26) und dadurch einen größeren zugänglichen Bereich der Auftriebszahlen als für eine Fläche mit unveränderlicher Wölbung, bei der lediglich der Anstellwinkel verändert werden kann. Letzten Endes sind die Verstellmomente, die der Führer zwecks Steuerbetätigung am Steuerknüppel zu leisten hat, bei dem unterteilten Steuer geringer als bei dem ungeteilten.

Während beim indifferenten Flugzeug sich die jeweils erforderlichen Steuerkräfte bei jedem Anstellwinkel von selbst einstellen, ist also beim stabilen Flugzeug, bei dem der Schwerpunkt weiter vorn liegt als beim indifferenten, das Ruder im Sinne der Vergrößerung von Anstellwinkel und

Wölbung des Steuers zu drehen, um einen größeren Anstellwinkel zu erreichen. Wenn man dann aber den Steuerknüppel in der betreffenden Lage durch irgendeine Vorrichtung festklemmt, so kehrt das Flugzeug bei Lagenstörungen immer wieder zu dem gewählten Anstellwinkel zurück. Wir werden später sehen, daß es jedoch nicht vorteilhaft ist, diese Stabilität über ein geringes Maß hinaus zu steigern, da eine starke Stabilität eine überaus beschleunigte Rückkehr zur Gleichgewichtslage mit sich bringt, und daher das Flugzeug durch seine in Drehung versetzten Massen durch die Ruhelage hindurchgestoßen wird, bis die rückführenden Momente der Luftkräfte wieder stark genug sind, die Bewegung zu verzögern und ihr entgegengesetzten Drehsinn zu geben. Um eine nur mäßige Stabilität, aber auf alle Fälle Stabilität zu erzielen, hat man die Tragflügel am Rumpf derart zu befestigen, daß der gemeinsame Schwerpunkt auf alle Fälle vor der durch Gl. (211) bezeichneten Grenzlage, aber eben nur so wenig vor dieser liegt, als die unvermeidliche Unsicherheit in der vorläufigen Bestimmung der Schwerpunktslage, bzw. in der Bestimmung der Werte von η' erfordert. Dann werden auch die vom Steuer bei stabiler Schwerpunktslage geforderten Zusatzkräfte, die durch Ruderbetätigung herbeizuführen sind, so klein als möglich. Das ist zumal deswegen erforderlich, weil die willkürlich eingeleiteten Zusatzkräfte noch eine zweite Aufgabe, nämlich Winkelbeschleunigung des Flugzeugs bei Anstellwinkeländerungen, zu leisten haben. Hierbei ist vor allem der Augenblick des Abfangens zu betrachten, bei dem durch das Steuer nicht allein der größte Anstellwinkel entgegen den stabilisierenden Kräften des Tragflügels im Gleichgewicht gehalten, sondern überhaupt erst hergestellt werden soll, und zudem durch die starke Krümmung der Flugbahn eine erhebliche Winkelgeschwindigkeit des Flugzeugs im selben Sinne gefordert wird, wie dies die Vergrößerung des Anstellwinkels verlangt. Wir werden später an Hand der Bewegungsgleichungen zu prüfen haben, wie groß die hierzu erforderlichen Zusatzkräfte sind, die ja nicht allein die Massenträgheit des Flugzeugs, sondern auch die dämpfenden Momente zu überwinden haben.

D. Die Stabilisierung durch Schwanzsteuer.

Sind für die Kopfsteuer bei stabiler Schwerpunktslage mit dem Anstellwinkel wachsende positive Zusatzkräfte für die jeweiligen Gleichgewichtslagen erforderlich, so sind bei Schwanzsteuern, entsprechend dem umgekehrten Vorzeichen ihres Hebelarms in bezug auf den Schwerpunkt, wachsende negative Zusatzkräfte nötig. Auch die eben gekennzeichneten „dynamischen“ Zusatzkräfte, die selbst bei indifferenter Schwerpunktslage beim Abfangen zu leisten sind, fordern negative Zuschläge zur Auf-

triebszahl des Schwanzsteuers. Trotzdem liegen hier die Verhältnisse günstiger als bei der Kopfflosse, weil die bei verschwindendem Anstellwinkel des Tragflügels nach Gl. (209) geforderte negative Auftriebszahl der Flosse mit Vergrößerung des Anstellwinkels absolut abnimmt, und somit hier die Steuerbetätigung nicht so leicht aus dem Bereich der empirisch erreichbaren Auftriebszahlen herausführt. Sinngemäß haben wir nur in Gl. (217) und (218) das Vorzeichen von η_{F_0} zu ändern, um zu erkennen, daß je nach der Größe der η' mit wachsendem Anstellwinkel η_F sogar das Vorzeichen ändern kann, das heißt, daß bei verhältnismäßig breiten Schwanzflossen und bei indifferenter (oder schwach stabiler) Schwerpunktslage das Steuer bei einem größeren Anstellwinkel gelegentlich völlig entlastet ist, die Resultierende der Luftkräfte der Zelle also durch den Schwerpunkt geht. Da bei jedem andern Anstellwinkel als dem dadurch gekennzeichneten das Steuer und damit auch das Ruder Kräfte aufzunehmen hat, gleichgültig, ob diese sich bei indifferenter Schwerpunktslage von selbst einstellen oder bei stabiler Schwerpunktslage durch einen bestimmten Ruderausschlag herbeigeführt werden müssen, wird dieser ausgezeichnete Anstellwinkel sich von selbst herstellen, wenn der Führer den Steuerknüppel losläßt, so daß das Ruder eben keine nennenswerten Kräfte aufzunehmen vermag.

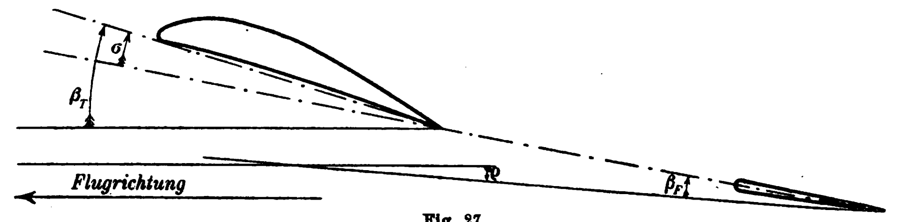


Fig. 27
zeigt die Ablenkung der Strömung für die Schwanzflosse durch den vorausgehenden Tragflügel ohne Berücksichtigung des Schraubenwindes.

Man erkennt aus Gl. (217) ohne weiteres, daß es vorteilhaft ist, dem Schwanzsteuer möglichst große Breite zu geben, damit man durch Vergrößerung des η' gerade bei großem absoluten Betrag von η_{F_0}, den man zwecks Verkleinerung der Schwanzflosse anstreben wird, möglichst mitten in den Bereich der durch Ruderausschlag überhaupt erreichbaren Auftriebszahlen gelangt. Freilich ist der Einfluß der Strömungsablenkung auf den Momentenausgleich nicht so unbeträchtlich, wie es sich oben für Kopfflossen ergab. Denn für die Schwanzflosse (Fig. 27) rührt die Ablenkung der Strömungsrichtung gegenüber der Flugrichtung nicht allein vom tragenden Wirbel (der Zirkulation um den Tragflügel) sondern in noch höherem Maße von den Randwirbeln des Tragflügels her. Nach

Prandtl (Lit. 16) beträgt der resultierende Ablenkungswinkel ϱ, in unserer Schreibweise:

$$\varrho = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{t_T}{b_T} \eta_T \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b_T}{2l}\right)^2}\right). \quad (219)$$

Daraus ergibt sich:

$$(220) \quad \frac{d}{d\beta_T} \varrho = \varrho' = \frac{\eta'_T}{\pi} \cdot \frac{t_T}{b_T} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b_T}{2l}\right)^2}\right) \qquad \frac{d\beta_F}{d\beta_T} = 1 - \varrho'. \quad (221)$$

Man erkennt hieraus, da nach Gl. (33) η' sich für größere Werte von $\frac{b}{t}$ immer mehr einem konstanten Wert nähert, daß der Einfluß der Ablenkung um so geringfügiger ist, je größer die Breite des Tragflügels im Verhältnis zur Flügeltiefe ist. Immerhin ist $\frac{d\beta_F}{d\beta_T}$, wie eine flüchtige Überprüfung zeigt, wesentlich kleiner als Eins und liegt gewöhnlich zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$. Da wir η_{F_0} nach den unmittelbar vorausgehenden Betrachtungen ohne weiteres einen empirisch zulässigen Größtwert geben können, wird die Flossengröße kleiner als bei Kopfflossen, und der Grenzwert $\frac{d}{t}$ der Schwerpunktslage der Indifferenz unterscheidet sich nach Gl. (211) wesentlich weniger von dem Wert χ, als dies bei Kopfflossen zu erreichen möglich war. Das heißt, wenn wir zur Darstellung im Momentendiagramm zurückkehren (Fig. 28), entspricht der Schwerpunktslage der Indifferenz eine Gerade, die nur wenig flacher verläuft als der obere Teil der Momentenkurve ζ. Aus dem Abstand der beiden Geraden ergeben sich wiederum diejenigen Auftriebszahlen, wie sie sich von selbst bei Anstellwinkeländerungen einstellen. Bei stabiler Schwerpunktslage, wie sie einer größeren Tangente der Ursprungsgeraden $\frac{d}{t_T} \cdot \eta$ im Diagramm entspricht, folgt, wie wir schon oben voraussahen, gegenüber der Indifferenz eine Vergrößerung der negativen Auftriebszahlen, die sich nur wieder in der Weise erreichen läßt, daß man zur willkürlichen Herstellung und Beibehaltung der Anstellwinkel die Flosse unterteilt und dem Ruder einen Ausschlag nach oben

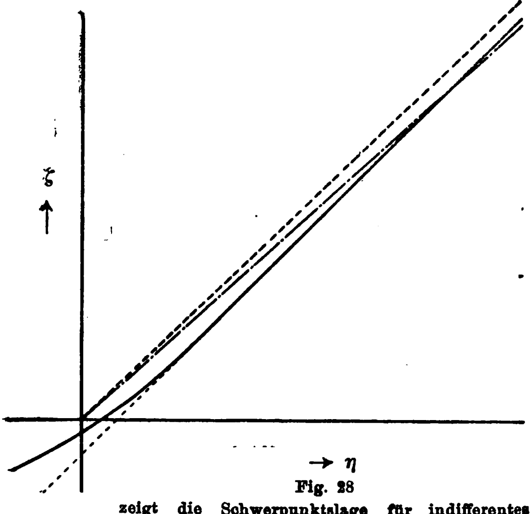


Fig. 28 zeigt die Schwerpunktslage für indifferentes — · — und stabiles — — — Gleichgewicht bei der Stabilisierung durch eine Schwanzflosse.

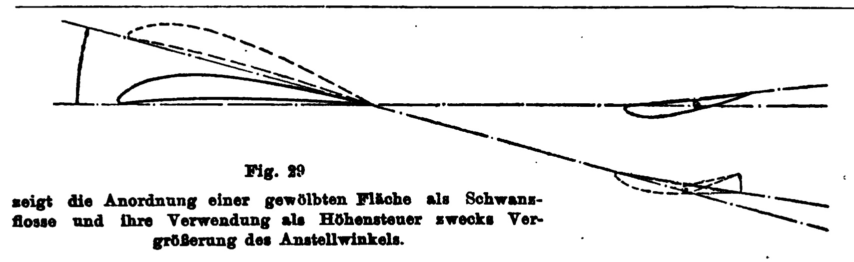


Fig. 29
zeigt die Anordnung einer gewölbten Fläche als Schwanzflosse und ihre Verwendung als Höhensteuer zwecks Vergrößerung des Anstellwinkels.

gibt, der um so größer sein muß, je größer der angestrebte Anstellwinkel (Fig. 29) ist. Es ist also vorteilhaft, da vom Schwanzsteuer (überwiegend) negative Auftriebszahlen selbst bei großen positiven Anstellwinkeln des Tragflügels gefordert werden, die Steuerfläche von vornherein im Sinne der Erzeugung negativen Auftriebs zu wölben, also dafür einfach eine gewölbte Fläche mit geringem Profilwiderstand auf dem Rücken liegend zu verwenden.

E. Der Einfluß des Schraubenwindes.

Die auf diese Weise selbst mit sehr kleinen Steuern auch bei stabiler Schwerpunktslage erreichbare Steuerbarkeit erhält einen erhöhten Sicherheitsgrad durch die Wirkung des Schraubenwindes, da dieser die Luftkräfte nach Gl. (183) gegenüber dem Gleitflug mit $(1 + \vartheta)^2$ erhöht. Der Einfluß ist um so beträchtlicher, je größer der Anstellwinkel. Denn große Anstellwinkel entsprechen kleiner Geschwindigkeit, wie sie beim Steigen zur Verminderung der Vortriebsleistung angestrebt wird. Und diese bringt bei gegebener Nutzleistung der Schraube, wenn wir von den Unterschieden ihres Wirkungsgrades und der Drehzahl absehen, eine der Geschwindigkeit umgekehrt proportionale Steigerung des Schubs mit sich und damit nach Gl. (185) eine Verstärkung des Schraubenwindes.

Wir dürfen freilich nicht außer Acht lassen, daß durch den Schraubenwind nicht nur die Größe, sondern auch die Richtung der Strömung um

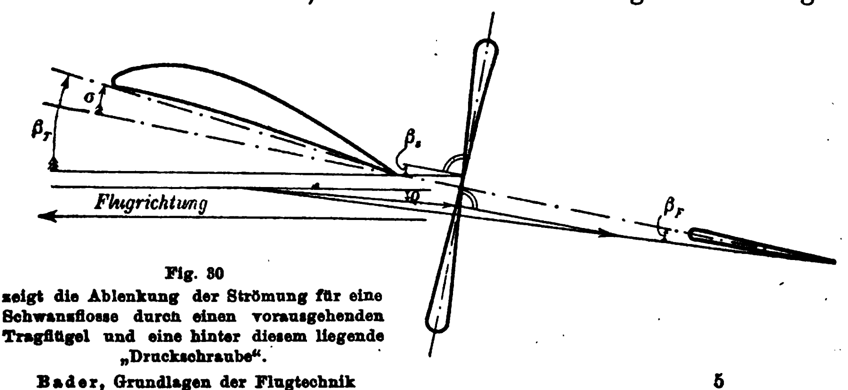


Fig. 30
zeigt die Ablenkung der Strömung für eine Schwanzflosse durch einen vorausgehenden Tragflügel und eine hinter diesem liegende „Druckschraube".

die Flosse beeinflußt wird, denn da im Flugzeug die Lagerung der Luftschraube und die Flosse starr miteinander verbunden sind, hat die Geschwindigkeit, die die Schraube der Luft erteilt, eine gegenüber dem Steuer unveränderliche Richtung. Fig. 30 soll für eine „Druckschraube" zeigen, in welcher Weise man den resultierenden Anstellwinkel dei Flosse bestimmen kann. Die Schraube empfängt die bereits vom Tragdeck unter Winkel ϱ abgelenkte Luft mit der Geschwindigkeit v, erteilt ihr in der Richtung ihrer Achse eine Zusatzgeschwindigkeit $v \cdot \vartheta$, und daraus ergibt sich unter Vernachlässigung der Kosinus der sehr kleinen Winkel die Größe der resultierenden Geschwindigkeit zu $v \cdot (1 + \vartheta)$ und ihre Richtungsänderung gegenüber der Flugrichtung zu $\frac{\varrho \cdot v + \beta_s v \cdot \vartheta}{v(1 + \vartheta)}$, worin β_s

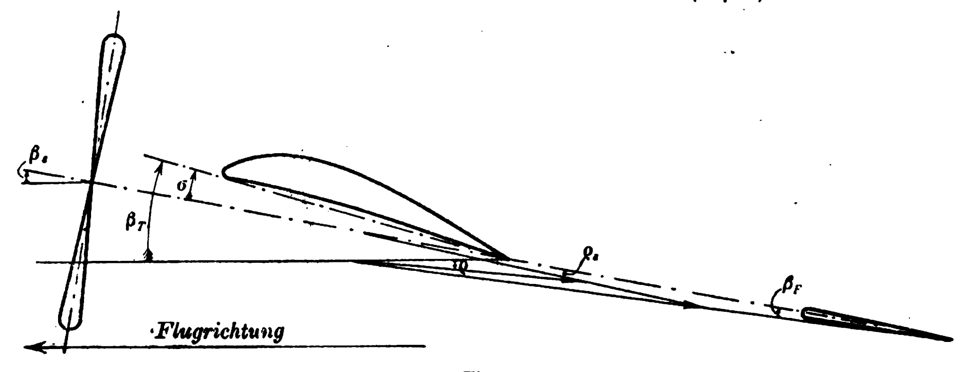


Fig. 31
zeigt die Ablenkung der Strömung für eine Schwanzflosse durch einen vorausgehenden Tragflügel und eine vor diesem liegende „Zugschraube".

der Winkel ist, unter dem die Schraubenachse gegen die Flugrichtung liegt. Daraus ergibt sich für den Anstellwinkel der Flosse die Gleichung:

$$\beta_F = \beta_T - \sigma - \frac{\varrho + \beta_s \vartheta}{1 + \vartheta}. \qquad (222)$$

Ebenso ist in Fig. 31 für eine „Zugschraube" das Winkelbild der Strömungen gegeben. Die Schraube empfängt noch nicht abgelenkte Luft mit der Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs v und erteilt ihr in Richtung ihrer Achse eine Zusatzgeschwindigkeit $\vartheta \cdot v$. Die Strömung hinter der Schraube setzt sich also zusammen aus der Strömung ums Tragdeck von der Geschwindigkeit v, die um den Betrag ϱ entsprechend dem Anstellwinkel β des Tragflügels gegenüber der Flugrichtung (Gl. 219) abgelenkt wird und den Zusatzwind vom Betrag $v \cdot \vartheta$, der ursprünglich in Richtung der Schraubenachse erzeugt, vom Tragdeck ebenfalls abgelenkt wird, aber nur um einen Betrag ϱ_s, wie er sich aus dem unveränderlichen Anstellwinkel β_0 des Tragflügels gegenüber der Schraubenachse berechnen läßt zu

$$\varrho_s = \frac{\eta'_{T\infty} \cdot \beta_0 \cdot t}{2\pi l}. \tag{223}$$

Hier kann man, wie wir schon durch den Index angedeutet haben, für η' den Wert annehmen, der einem unendlich breiten Flügel zukommt, Gl. (14), da gerade wie bei diesem der Ausgleich der Drucke um die Ränder des Tragdecks herum nicht stattfinden kann. Damit ergibt sich also:

$$\varrho_s = \beta_0 \frac{t}{2l}. \tag{224}$$

Damit folgt der Anstellwinkel der Flosse aus:

$$\beta_F = \beta_T - \sigma - \frac{\varrho + (\beta_s + \varrho_s)\vartheta}{1+\vartheta}. \tag{225}$$

Die Ableitung der Anstellwinkel nacheinander gemäß Gl. (222) und (225) ergibt, da:

$$\beta_s = \beta_T - \beta_0, \tag{226}$$

$$\frac{d\beta_F}{d\beta_T} = 1 - \frac{\varrho' + \vartheta}{1+\vartheta}, \tag{227}$$

also unabhängig davon, ob es sich um eine Druck- oder Zugschraube handelt, einen gleichen, für endliches ϑ aber geringeren Betrag als für verschwindendes ϑ. Der Einfluß des Abwinds der Zelle auf die Luftkräfte der Flosse ist also im Motorflug kleiner als im Gleitflug. Andererseits sind die Luftkräfte für den beaufschlagten Teil der Flosse größer, und so erhalten wir für den endgültigen Faktor der stabilisierenden Kräfte

$$\frac{d\beta_F}{d\beta_T}(1+\vartheta)^2 = \left(1 - \frac{\varrho' + \vartheta}{1+\vartheta}\right) \cdot (1+\vartheta)^2 = (1-\varrho')(1+\vartheta) \tag{228}$$

folgende Tabelle:

	$\vartheta = 0$	$\vartheta = \frac{1}{2}$	$\vartheta = 1$
$\varrho' = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{2}$
$\varrho' = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

Der günstige Einfluß der Geschwindigkeitssteigerung durch den Schraubenwind überwiegt also die nachteilige Herabsetzung der Anstellwinkeländerung der Flosse, und die entsprechende Steigerung der Luftkräfte an der Flosse bringt vermehrte Stabilität mit sich. Der Sicherheit halber aber und um nicht für die kurze Dauer des Gleitfluges durch eine geringe Labilität die Aufmerksamkeit des Führers erhöht in Anspruch zu nehmen, wird man die Wirkung des Schraubenwindes auch bei Schwanzsteuern außer Acht lassen.

5*

F. Die allgemeine Gleichung des Moments der Luftkräfte.

Wir wollen nunmehr die Gleichung für die Momente und ihre Änderung mit dem Anstellwinkel ganz allgemein für einen n-Decker mit beliebiger Staffelung, Verwindung, Pfeilform, Schränkung und Flossenanordnung anschreiben; wir wollen obendrein annehmen, daß die Flügeltiefe nicht über die ganze Spannweite der Flügel oder Flossen unveränderlich sei, sondern linear nach außen abnehme. t mag, nach wie vor, den Mittelwert der Flügeltiefe bedeuten; die Flügeltiefe in der Mitte (Symmetrieebene) sei $t + u$, am Rande $t - u$. Auch der Anstellwinkel sei nicht unveränderlich, sondern nehme linear nach außen ab. Denn jede nicht lineare Abnahme macht die Verwendung verschiedener Profile bzw. gebogener Holme erforderlich, die hinsichtlich Herstellung bzw. Festigkeit nachteilig ist. Eine lineare Abnahme des Anstellwinkels dagegen läßt sich selbst bei Flügeln, die ohne Verwindung hergestellt sind, ohne die Holme durchzubiegen, lediglich durch Änderung der Verspannung er-

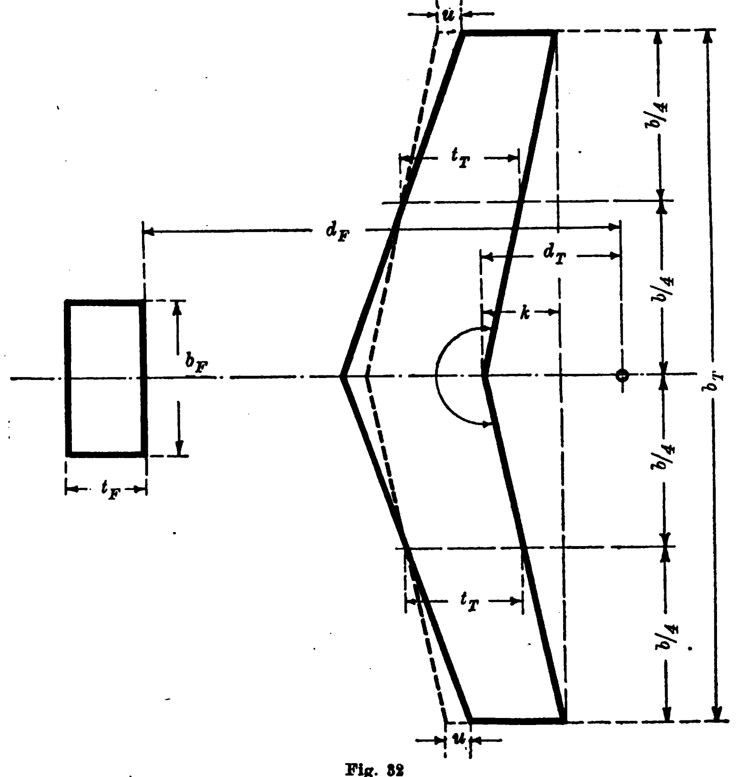


Fig. 32
zeigt die Massen, die bei der Berechnung des Moments der Luftkräfte eine Rolle spielen.

reichen. Hierdurch wird die Festigkeit und Haltbarkeit des Fachwerks nicht wesentlich beeinträchtigt. Wir bezeichnen den Mittelwert der Auftriebszahl mit η, und den Gesamtbetrag, um den die Auftriebszahl von der Mitte bis zum Rande abnimmt, mit 2ϑ. Dann beträgt im Abstand z von der Symmetrieebene die Auftriebszahl $\left(\eta + \vartheta - 2\vartheta\frac{2z}{b}\right)$, die Flügeltiefe $\left(t + u - 2u\frac{2z}{b}\right)$ und der Abstand der unendlich kurzen Hinterkante jedes Flügelelements von einer zur Flugrichtung senkrechten Ebene durch den Schwerpunkt $\left(d - k\frac{2z}{b}\right)$. Hierin dient k nach Fig. 32 zur Definition der Pfeilform durch den Winkel

$$\pi + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2k}{b}. \tag{229}$$

Das Moment der Luftkraft jedes Flügelelements in bezug auf den Schwerpunkt setzt sich nun zusammen aus dem Moment der Luftkräfte, wenn wir diese an die Hinterkante verlegen, und dem Moment der Luftkraft in bezug auf die Hinterkante selbst. Die Gesamtheit der unendlich kleinen Momente ergibt sich aus dem doppelten Wert ihrer Integration über die halbe Spannweite:

$$\begin{aligned}
M_q &= \varrho \cdot v^2\Big[\sum 2\int_0^{\frac{b}{2}}\left(\eta + \vartheta - 2\vartheta\frac{2z}{b}\right)\left(t + u - 2u\frac{2z}{b}\right)\left(d - k\frac{2z}{b}\right)\cdot dz \\
&\quad + \sum 2\int_0^{\frac{b}{2}}\left(-\varphi + \chi\left[\eta + \vartheta - 2\vartheta\frac{2z}{b}\right]\right)\left(t + u - 2u\frac{2z}{b}\right)^2\cdot dz \\
&= \varrho v^2\cdot\sum b\Big[\eta\Big[t\left(d - \frac{k}{2} + \chi t\right) + \frac{u}{8}\left(\frac{k}{2} + \chi u\right)\Big] \\
&\quad - \varphi\left(t^2 + \frac{u^2}{3}\right) + \frac{\vartheta}{8}\Big[t\frac{k}{2} + u\left(d - \frac{k}{2} - 2\chi t\right)\Big]\Big].
\end{aligned} \tag{230}$$

Die Summierung ist zu erstrecken über alle Decken der Zelle und des Höhensteuers. Da sich bei Mehrdeckern die Strömungen um die Flügel gegenseitig beeinflussen, sind die Tragflügel zwecks Verwirklichung der angenommenen Werte $\eta_{\rm I}, \eta_{\rm II}, \eta_{\rm III}, \ldots \vartheta_{\rm I}, \vartheta_{\rm II}, \vartheta_{\rm III}$ entsprechend Gl. (28), (29) um $\varDelta\alpha$, Schwanzflossen nach Gl. (219) um $\Sigma\varrho$ steiler anzustellen, bzw. die ursprünglich angenommenen Werte $\eta_{\rm I}, \eta_{\rm II}, \ldots$, wenn Aufbau der Zelle und Schränkung zwischen dieser und den Steuerflächen bereits festliegt, entsprechend zu verbessern. Es bedarf kaum der Erwähnung, daß man den Momenten der Flügel und Flossen, die Luftkraftmomente der Rümpfe und Boote hinzuzuzählen hat.

Die Ableitung des Moments der Luftkräfte M_q nach dem Anstellwinkel ergibt sich zu:

$$M_q' = \varrho v^2 \sum b\eta' \left[t\left(d - \frac{k}{2} + \chi t\right) + \frac{u}{8}\left(\frac{k}{2} + \chi u\right)\right]. \tag{231}$$

Ändern sich die η' wesentlich mit dem Anstellwinkel, so läßt sich also die Indifferenz nicht mehr im ganzen betriebstechnisch wichtigen Gebiet der Anstellwinkel erreichen, sondern mit dem Anstellwinkel ändert sich der Grad der Stabilität. Praktisch wird es freilich genügen, M_q für die obere und untere Grenze des bezeichneten Bereichs der Anstellwinkel zu bestimmen und die Differenz beider Werte mit der entsprechenden aus dem mittleren Wert von η' folgenden Anstellwinkeländerung zu dividieren, um einen mittleren Wert für M_q' zu erhalten:

$$M_q' \cong \frac{\Delta M_q}{\Delta \eta} \cdot \eta'. \tag{232}$$

Da Stabilität negatives M_q' fordert, ist eine Abnahme der Flügeltiefe nach außen der Stabilisierung nachteilig, weil nach Gl. (231) mit Einführung abnehmender Flügeltiefe (Fig. 32) der Druckpunkt b der größeren, d. h. stärker tragenden, Flügelelemente in der Mitte nach vorn rückt, während er bei den schwächer tragenden sich nach hinten verschiebt. Infolgedessen rückt also die Resultierende gegenüber dem Schwerpunkt nach vorn, und dem entspricht geringere Stabilität. Es ist eine freilich sehr schwache Pfeilform der Hinterkante erforderlich, um diesen Nachteil wieder aufzuheben. Die Abnahme der Flügeltiefe ist allerdings für die Seitenstabilität günstig; auch bringt sie eine, wenn auch nur geringe, Abnahme der Biegungsmomente für die Holme mit sich. Aber alle Vorteile werden kaum imstande sein, die sehr kostspielige Herstellung verschieden tiefer Rippen zu rechtfertigen. Man wird daher gewöhnlich Flügel unveränderlicher Tiefe verwenden. Mit $u = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (230), (231) außerordentlich:

$$M_q = \varrho v^2 \sum bt\left[\eta\left(d - \frac{k}{2} + \chi t\right) - \varphi t + \frac{\vartheta}{6} k\right], \tag{233}$$

$$M_q' = \varrho v^2 \sum bt\eta' \left(d - \frac{k}{2} + \chi t\right). \tag{234}$$

Die Anwendung dieser Gleichungen auf den Eindecker ohne Pfeilform mit nur einer Flosse liefert die Gl. (206) und (207), worin freilich der Abstand der Flosse l der Einfachheit halber in bezug auf ihren „Druckpunkt“ angegeben war, während die Gl. (233) und (234) den Abstand vom Schwerpunkt auf die Hinterkante der Flügel und Flossen beziehen. Andererseits umfaßt nach der obenstehenden Anweisung η' in Gl. (234) bereits die Strömungsablenkung, die durch benachbarte Flächen hervorgerufen wird und in Gl. (207) durch den Faktor $\frac{d\beta_F}{d\beta_T}$ besonders hervorgehoben wurde.

G. Die Stabilisierung durch Pfeilform.

Nach Gl. (234) zeigt sich Pfeilform in jedem Fall als vorteilhaft für die Stabilisierung, ja, wenn wir die Gleichung auf einen einzelnen Flügel anwenden, ergibt sich die Möglichkeit, durch große Pfeilform Indifferenz herbeizuführen.

$$d_* = \frac{k}{2} + \chi t. \qquad (235)$$

Verschwindet aber in Gl. (233) der Faktor von η, so müssen die beiden letzten Glieder der Klammer für sich zu Null werden. Daraus ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung für die durch Gl. (235) gekennzeichnete Schwerpunktslage der Indifferenz:

$$\vartheta = \frac{6\varphi t}{k}. \qquad (236)$$

Der Anstellwinkel des Flügels muß also von der Mitte nach dem Rande zu abnehmen um einen Betrag $\frac{2\vartheta}{\eta'}$, der um so größer ist, je geringer die Pfeilform an sich ist, und um nicht gar negative Auftriebszahlen am Rande zu erhalten, muß die Pfeilform schon recht beträchtlich sein $k > t$.

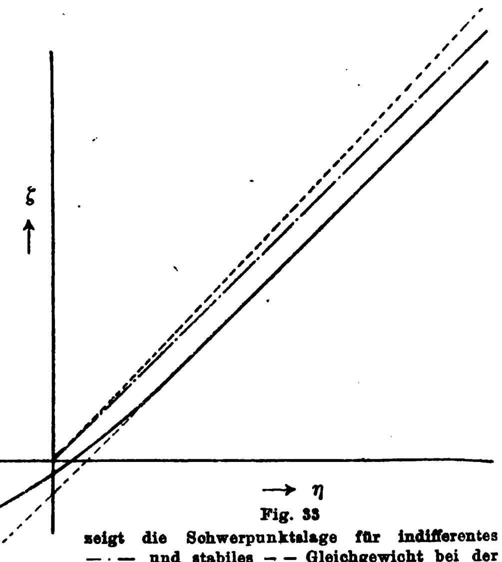


Fig. 33 zeigt die Schwerpunktslage für indifferentes — · — und stabiles – – Gleichgewicht bei der Stabilisierung durch Pfeilform.

Die mechanische Bedeutung dieser Verwindung und der damit in engster Beziehung stehenden Pfeilform veranschaulichen wir am besten wieder, indem wir zum Momentendiagramm Fig. 1 zurückkehren. Die mit Gl. (235) für Indifferenz geforderte Schwerpunktslage entspricht diesmal der Ursprungsparallelen χt zur Momentengeraden ζ selbst (Fig. 33), denn da $d - \frac{k}{2}$ nichts anderes ist als der „mittlere" Abstand der Flügelvorderkante vom Schwerpunkt, so folgt in bezug auf die Hinterkante selbst $\left(d - \frac{k}{2}\right) = \chi t$. Die Verwindung des Flügels dient offenbar nur dazu, das unveränderliche Moment zu beseitigen, welches dem Abstand der parallelen Geraden entspricht, und dieses negative Moment wird eben ausgeglichen durch das positive Moment, was die größeren Kräfte im inneren vorderen Teil des Flügels gegenüber den kleineren Kräften im äußeren

hinteren Teil des Flügels vermöge der starken Pfeilform auszuüben imstande sind. Im besonderen werden für verschwindenden Gesamtauftrieb die mittlere Hälfte des Flügels positiven Auftrieb, die beiden äußeren Viertel jedoch negativen Auftrieb empfangen.

Die Höhensteuerung wird man bei schwanzlosen Flugzeugen den zu seitlichen Lagenänderungen erforderlichen, üblichen Quersteuern zu übertragen haben. Die Querruder bewirken dann bei Betätigung im gleichen Drehsinn infolge ihrer Lage hinter dem Schwerpunkt eine Anstellwinkeländerung, bei Betätigung im entgegengesetzten Drehsinn Änderungen der seitlichen Lage.[1])

H. Untergeordnete Einflüsse auf das Moment.

Wir haben bei der Ableitung der Momente das Moment des Widerstandes, soweit es nicht in der Momentenzahl enthalten ist, vernachlässigt, indem wir an der Vorderkante der Flügelelemente statt der Luftkräfte lediglich die Auftriebskräfte wirksam dachten und dementsprechend die Hebelarme dem Grundriß Fig. 32 entnahmen, der in einer Ebene gezeichnet ist, die parallel zur Flugrichtung und senkrecht zur Symmetrieebene liegt. Die Einbeziehung der Momente des schädlichen, des induzierten und des Profilwiderstandes kann nach den Gl. (54), (18), (23), (24) und (55) erfolgen, wird aber nur bei ungewöhnlichen Konstruktionen auf die Werte von M_q und M_q' von nennenswertem Einfluß sein. Denn da gewöhnlich der Schwerpunkt in mittlerer Bauhöhe liegt, heben sich die Momente der Widerstände der Tragflügel und des Fahrgestells gegenseitig fast vollständig auf, während die Widerstände des Rumpfes und des Höhensteuers überhaupt nur verschwindende Hebelarme haben.

Wir haben ferner beim Ansatz der Momentengleichung außer acht gelassen, daß der Strömungsdruck in der Nähe der Flügelränder durch die sich anschließenden Wirbel herabgesetzt wird, und infolgedessen bei pfeilförmigen Tragflügeln das Moment, das die Flügelenden zum Gesamtmoment liefern, kleiner ist als es einer durchaus gleichförmigen Verteilung des Auftriebs, wie sie die Rechnung stillschweigend voraussetzt, entspricht. Wir müssen, um diesen Einfluß zu berücksichtigen, zum mindesten (entsprechend der zweiten Näherung —·—·— Fig. 3) annehmen, daß die Flügelenden in einer Breite von ein Viertel der Tragflügeltiefe nicht tragen. Dadurch ändert sich die Gleichung für die Schwerpunktslage inso-

1) Für die Steuerung kann man ohne weiteres das übliche „Radsteuer" verwenden. Man muß nur die Quersteuerseile unterhalb der Drehachse des Steuerknüppels, der das Handrad trägt, austreten und über davor oder dahinter liegende Rollen gehen lassen. Den Schutzanspruch auf derartige Anordnungen hat Verf. der Luftverkehrsgesellschaft (L. V. G.) (Berlin) übergeben.

fern, als das konstruktive Maß der Pfeilform k mindestens um einen Bruchteil $\frac{t}{2b}k$ vermindert werden muß, um seinen wirksamen Betrag zu erhalten.

Schließlich haben wir die Abweichung der Momentenkurve vom linearen Verlauf, wie sie sich z. B. in Fig. 1 unterhalb der Auftriebszahl 0,15 geltend macht, vernachlässigt. Diese Abweichung ist an sich natürlich ohne jede Bedeutung, da unter gewöhnlichen Umständen Auftriebszahlen unter 0,25 beim Horizontalflug kaum in Anspruch genommen werden und beim Gleitflug schon deswegen nicht unterschritten werden dürfen, damit beim Abfangen vor der Landung nicht allzu hohe Überbeanspruchungen des Fachwerks der Zelle hervorgerufen werden. Aber selbst wenn wir annehmen, daß durch äußere Störungen der Auftrieb gelegentlich bis zum Verschwinden vermindert wird, verläuft die Abweichung der Momentenkurve von der in der Rechnung verwendeten Näherungsgeraden durchaus im erwünschten Sinne. Denn die Flosse liefert, z. B. bei indifferentem Gleichgewicht, Luftkräfte, deren Größe aus dem Diagramm für den Ordinatenabschnitt zwischen dieser Näherungsgeraden und der Schwerpunkts-Ursprungsgeraden entnommen werden kann, während die Zelle lediglich Kräfte fordert, die dem Abstand der Momentenkurve von der Ursprungsgeraden proportional sind. Mit Verkleinerung des Anstellwinkels liefert die Flosse also größere Kräfte als sie die Zelle fordert. Die Flosse führt also, selbst bei sonst indifferentem Gleichgewicht, stark stabilisierend das Flugzeug immer mindestens zu dem Anstellwinkel zurück, der dem Abzweigpunkt der Momentenkurve von ihrer Näherungsgeraden entspricht; und wenn wir, wie oben geschah, den Schnitt der Näherungsgeraden auf der Ordinatenachse nach Gl. (210) in erster Linie für die Dimensionierung des Höhensteuers verwendet haben, so sehen wir, daß für diesen Fall (Kopfsturz) dadurch, daß wir die Momentenkurve durch eine Gerade ersetzt haben, bereits eine doppelte Sicherheit für die Steuerbarkeit gewährleistet wird, denn nach Fig. 1 ist der Abschnitt der Kurve auf der Ordinatenachse nur etwa halb so groß als der ihrer Näherungsgeraden.

V. Der Vorgang bei der Berechnung der Flugzeugbewegungen.

A. Art und Anzahl der Bewegungsgleichungen.

Das Flugzeug bietet als ein nach allen drei Koordinaten beweglicher und in jeder Richtung drehbarer Körper das allgemeinste Bewegungsproblem. Das bedeutet mathematisch den Ansatz von sechs Bewegungsgleichungen, die neben Weg bzw. Winkel deren erste und zweite Ableitung nach der Zeit als Geschwindigkeit und Beschleunigung enthalten. Das in dieser Allgemeinheit kaum übersichtliche Bewegungsproblem ver-

einfacht sich nun unter dem Gesichtspunkt, daß die Bewegungsgleichungen nur innerhalb kurzer Zeiträume betrachtet werden. Denn Störungen treten im Fluge tatsächlich so oft ein, daß ihre Beseitigung bis auf verschwindende Bruchteile bereits innerhalb weniger Minuten erfolgen muß. Daher können die Änderungen der Luftdichte und der Erdbeschleunigung mit der Höhe über dem Meerespiegel und mit Breiten- und Längengrad des Standorts außer acht gelassen werden. Sind aber Luftdichte und Erdbeschleunigung, die beide allein die am Flugzeug wirkenden äußeren Kräfte liefern, als Konstante anzusehen, so fallen aus den Bewegungsgleichungen die drei Koordinaten des Standorts und die Richtung des Fluges in der Wagerechten: „Kurs“ heraus. Statt der Koordinaten selbst und dem Kurs treten als Veränderliche die entsprechenden Geschwindigkeiten auf, d. h. die Eigengeschwindigkeit in Richtung der Symmetrieebene, die „Geschwindigkeit“ senkrecht zu dieser („Schieben“ „Rutschen“), die Steiggeschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit der Kursänderung. Dadurch vereinfacht sich das Bewegungsproblem. Während die ursprünglichen sechs Bewegungsgleichungen für jede Variable eine Differentialgleichung 12. Ordnung liefern, erhalten wir nunmehr eine Differentialgleichung 8. Ordnung, da 4 der Variablen linear nicht vorkommen.

Unter der Voraussetzung, daß es sich um die Betrachtung „unendlich kleiner“ Bewegungen handelt, kann man weiterhin die Bewegungsgleichungen in zwei Gruppen zu je dreien, oder was dasselbe ist, die Differentialgleichung 8. Ordnung in 2 Gleichungen 4. Ordnung zerlegen. Man hat zu dem Zweck eine und nur eine Voraussetzung zu machen, die praktisch keine Einschränkung der Anwendbarkeit der Rechnung bedeutet: die Annahme, daß das Flugzeug eine Symmetrieebene besitzt, in der der Schwerpunkt und die Richtung seiner stationären Bewegung liegt. Dann rufen Störungen des Anstellwinkels, der Geschwindigkeit und der Flugrichtung in der Lotrechten Kräfte wach, die sich immer zu einer Resultierenden in der Symmetrieebene zusammenfassen lassen und daher eine Lagenänderung der Symmetrieebene nicht zur Folge haben können. Andererseits wecken kleine Störungen in der Lage gegenüber dem Kurs, im Kurs selbst und in der Schräglage nur Kräfte, die bei ihrer Zusammenfassung in der Symmetrieebene verschwinden oder zur Symmetrieebene senkrecht stehen, also eine Bewegung des Flugzeuges innerhalb seiner Symmetrieebene nicht zur Folge haben können. Die sechs Bewegungsgleichungen zerfallen damit in zwei Gruppen, von denen eine die Bewegung des Flugzeuges in seiner Symmetrieebene, eine Translation nach zwei Richtungen und Drehung um eine zur Symmetrieebene senkrechte Achse, die andere die Bewegungen der Symmetrieebene selbst, eine Translation senkrecht zur Symmetrieebene und Drehung um zwei in ihr liegende Achsen darstellen. Jede Gruppe umfaßt also ursprünglich drei lineare Differential-

gleichungen zweiter Ordnung. Da aber, wie schon gesagt, die Bewegung unabhängig von Standort und Kurs verläuft, kommen in diesen Differentialgleichungen jeweils zwei der Variablen nicht linear vor, sondern nur ihre ersten und zweiten Ableitungen nach der Zeit, d. h. die entsprechenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Die Beschleunigungen erscheinen dann als erste Ableitungen der Geschwindigkeit nach der Zeit. Dann ist also nur eine der drei Bewegungsgleichungen von zweiter Ordnung, die beiden andern sind von erster Ordnung. Die drei Gleichungen liefern also bei ihrer Auflösung nach je einer der Variablen immer eine Differentialgleichung 4. Ordnung, und wenn dabei die abhängigen Variablen in der üblichen Weise für unendlich kleine Bewegungen als einfache Exponentialfunktion $x = le^{\lambda t}$ substituiert werden, eine Gleichung 4. Grades für λ, deren vier Wurzeln für das vollständige Integral der abhängigen Variablen jeweils vier Glieder liefern. Um von dem dadurch bestimmten Charakter der Variablen eine Anschauung gewinnen zu können, erinnern wir uns zunächst an die übliche Darstellung gedämpfter Bewegungen.

B. Die einfache gedämpfte Schwingung.

Bedeutet C die Masse oder das Trägheitsmoment des Körpers, D die dämpfende Kraft für die Einheit der Geschwindigkeit oder das dämpfende Moment für die Einheit der Winkelgeschwindigkeit und E die elastische Kraft oder das rückführende Moment für die Einheit der Auslenkung x aus der Gleichgewichtslage, dann besteht die dynamische Beziehung:

$$C\frac{d^2x}{dt^2} + D\frac{dx}{dt} + Ex = 0. \tag{237}$$

Die Substitution: $$x = l_1 e^{\lambda_1 t} + l_2 e^{\lambda_2 t} \tag{238}$$

führt zur Lösung; denn die Gl. (237)

$$l_1 \cdot e^{\lambda_1 t}(C\lambda_1^2 + D\lambda_1 + E) + l_2 e^{\lambda_2 t}(C\lambda_2^2 + D\lambda_2 + E) = 0 \tag{239}$$

kann zu jeder Zeit t nur erfüllt sein, wenn die beiden Klammern für sich verschwinden, also λ_1 und λ_2 die beiden Wurzeln der „charakteristischen" Gleichung $$C\lambda^2 + D\lambda + E = 0 \quad \text{sind.} \tag{240}$$

Ist $D^2 < 4\,CE$, so sind die Wurzeln konjugiert komplex

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu \tag{241}$$

und die unabhängige Variable $$x = e^{\mu t}[l_1 e^{i\nu t} + l_2 e^{-i\nu t}] \tag{242}$$

kann nur dann eine reelle Funktion der Zeit sein, wenn auch die Integrationskonstanten l_1 und l_2 konjugiert komplex sind, denn da

$$e^{i\nu t} = \cos\nu t + i\sin\nu t \qquad e^{-i\nu t} = \cos\nu t - i\sin\nu t \tag{243}$$

wird
$$x = e^{\mu t}[(l_1 + l_2)\cos \nu t + i(l_1 - l_2)\sin \nu t]. \tag{244}$$
Die Summe der Konstanten muß also einen rein reellen, ihre Differenz einen rein imaginären Wert darstellen. Führen wir für diese Werte neue Bezeichnungen ein,
$$l_1 + l_2 = m; \quad l_1 - l_2 = in \qquad l = \frac{m \pm in}{2}, \tag{245}$$
so erkennt man, daß sich die Bewegung
$$x = e^{\mu t}[m \cos \nu t - n \sin \nu t] \tag{246}$$
zusammensetzt aus der Überlagerung einer Kosinusschwingung mit der Amplitude m und einer Sinusschwingung mit der Amplitude n.

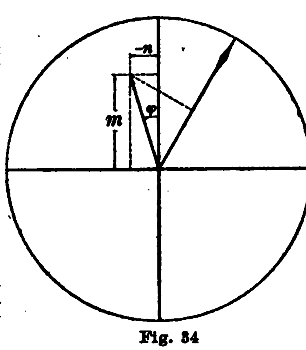


Fig. 34 zeigt die Ermittlung der Amplitude und des Phasenwinkels φ mit Hilfe der durch die Anfangsbedingungen bestimmten Werte m und $-n$.

Ein viel übersichtlicheres Bild von einer durch Gl. (246) charakterisierten Bewegung erhält man jedoch, wenn man sich in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem als Abszisse n und als Ordinate m aufgetragen denkt (Fig. 34), und den dadurch bestimmten Punkt durch einen Vektor mit dem Ursprung verbindet. Betrachtet man nun dieses Koordinatensystem als ein Zifferblatt, in dem sich ein Zeiger, der sich zu Beginn der Betrachtung, d. h. z. Zt. $t = 0$, in Deckung mit der Ordinatenachse befindet, mit solcher Geschwindigkeit dreht, daß er während der Dauer einer vollen Schwingung eine ganze Umdrehung vollbringt, so ist das Binom Gl. (246) gleich der Projektion des im Zifferblatt feststehenden Vektors auf den Zeiger. Man hat also diese Projektion nur noch mit $e^{\mu t}$ zu multiplizieren, um den Ausschlag x als Funktion der Zeit t auftragen zu können. Bei verschwindender Dämpfung ist also der Vektor
$$r = \sqrt{m^2 + n^2} \tag{247}$$
gleich dem größten Ausschlag, und dieser größte Ausschlag wird ideell erreicht zur Zeit
$$(248) \qquad t = -\frac{\varphi}{\nu} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{n}{m} \qquad (249)$$
also um den Bruchteil $\frac{\varphi}{2\pi}$ der Schwingungsdauer vor Einsetzen der reellen Störung. Dieses Voreilen φ der Phase gegenüber dem Moment $t = 0$, in dem die Störung eintritt oder die Betrachtung der Bewegung beginnt, und die Amplitude r sind wie m und n abhängig von Ausschlag x_0 und Geschwindigkeit $\dot{x}_0$ in dem ausgezeichneten Moment $t = 0$:
$$x_0 = m \tag{250}$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = e^{\mu t}\left[(\mu m - \nu n)\cos \nu t - (\mu n + \nu m)\sin \nu t\right] \tag{251}$$

$$\dot{x}_0 = \mu m - \nu n \tag{252}$$
$$n = \frac{\mu x_0 - \dot{x}_0}{\nu}. \tag{253}$$

Hingegen sind μ und ν, wie aus den Gleichungen (240) (241) hervorgeht,

$$\mu = -\frac{D}{2C} \tag{254}$$
und
$$\nu = \sqrt{\frac{E}{C} - \left(\frac{D}{2C}\right)^2} \tag{255}$$

lediglich abhängig von den Kräften bzw. Momenten C, D, E des bewegten Systems. So oft νt um 2π gewachsen ist, erreicht die Bewegung die gleiche Phase (bei ungedämpften Bewegungen die gleiche Amplitude). Die Schwingungsdauer ist also

$$T = \frac{2\pi}{\nu} \text{ sk.} \tag{256}$$

Sieht man von der Phase ab, so erreicht je nach den Vorzeichen von μ der anfänglich vorhandene Ausschlag $x_0 = m$ seinen doppelten bzw. halben Wert, sobald $e^{\mu t} = 2$, bzw. 2^{-1} wird; also nach einer Doppel- bzw. Halbwertszeit von:

$$B = \frac{\ln 2}{\mu} \text{ sk.} \tag{257}$$

Hat man die Bemessung der Dämpfung in der Hand, so wird man also, um Störungen möglichst schnell zu beseitigen, ihr einen möglichst großen positiven Wert geben; denn je größer die Dämpfung D und damit nach Gl. (254) der negative Wert von μ ist, um so schneller wird eine unwillkürlich eingetretene Störung auf ein verschwindendes Maß zurückgeführt. Nach der dreifachen Halbwertszeit beträgt die Störung 12%, nach der vierfachen 6% ihres ursprünglichen Betrages, und je schneller eine Störung beseitigt wird, um so ungefährlicher ist eine neue. Daraus folgt jedoch keineswegs, daß man die Dämpfung ins ungemessene steigern soll. Denn bereits, wenn $\nu = 0$, also

$$\frac{D}{C} = 2\sqrt{\frac{E}{C}} \tag{258}$$

wird, geht die periodische Bewegung in eine aperiodische über, die mit weiterer Steigerung der Dämpfung immer langsamer zum stetigen Flug zurückführt. Offenbar wird bei dem mit Gl. (258) angegebenen Grenzwert von D die Störung am schnellsten beseitigt; denn die angestrebte Ruhelage wird bei einer periodischen Bewegung immer wieder überschritten, bei einer aperiodischen nie ganz erreicht. Wir haben von vornherein angenommen, daß, wie schon die Bezeichnung besagt, die Dämpfung überhaupt positiv ist. Das ist beim Flugzeug durchaus nicht ohne weiteres der Fall. Die Definition der Stabilität ist hier weiter zu fassen. Es genügt nicht, daß man bei Störungen durch diese selbst Kräfte wachrufen läßt, die das Flugzeug der Ruhelage wieder zuzuführen streben, es muß auch gefordert

werden, daß die Schwingungen, die von den rückführenden, im engeren Sinn stabilisierenden Kräften hervorgerufen werden, nicht infolge negativer Dämpfung zu immer größeren Ausschlägen führen; d. h. mechanisch: Zur Bedingung $E > 0$ tritt $D > 0$.

C. Gekoppelte gedämpfte Bewegungen.

Wir haben oben gesehen, daß die Bewegungsgleichungen in zwei Gruppen von je drei Gleichungen zerfallen, die bei ihrer Auflösung nach einer Variablen für diese jeweils eine Differentialgleichung 4. Ordnung mit der Zeit als unabhängiger Variabler liefern. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung läßt sich angeben mit

$$x = l_1 e^{\lambda_1 t} + l_2 e^{\lambda_2 t} + l_3 e^{\lambda_3 t} + l_4 e^{\lambda_4 t}. \tag{259}$$

Die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 erhält man aus einer Gleichung 4. Grades für λ,

$$\lambda^4 + \mathfrak{K}_1 \lambda^3 + \mathfrak{K}_2 \lambda^2 + \mathfrak{K}_3 \lambda + \mathfrak{K}_4 = 0, \tag{260}$$

die aus den Bewegungsgleichungen hervorgeht, wenn man in diesen für die Ableitungen nach der Zeit t, der Substitution entsprechend

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \ddot{x} = \lambda^2 x \tag{261}$$

einführt, und dann die Variablen selbst eliminiert. Wird eines der beiden Wurzelpaare konjugiert komplex, so bestimmt es wie oben wieder eine Schwingung. Enthalten beide Wurzelpaare imaginäre Anteile, so setzt sich die Bewegung aus zwei Schwingungen zusammen. Für diesen Fall erscheinen mit den Wurzelwerten

$$\lambda_{\mathrm{I}} = \mu_{\mathrm{I}} \pm i\nu_{\mathrm{I}}, \qquad \lambda_{\mathrm{II}} = \mu_{\mathrm{II}} \pm i\nu_{\mathrm{II}} \tag{262}$$

die Variablen in der Form:

$$x = e^{\mu_{\mathrm{I}} t}(l_1 e^{i\nu_{\mathrm{I}} t} + l_2 e^{-i\nu_{\mathrm{I}} t}) + e^{\mu_{\mathrm{II}} t}(l_3 e^{i\nu_{\mathrm{II}} t} + l_4 e^{-i\nu_{\mathrm{II}} t}) \tag{263}$$

die sich nach den Gl. (243) bis (245) mit

$$\begin{aligned} l_2 + l_2 &= m_{\mathrm{I}} & \qquad l_3 + l_4 &= m_{\mathrm{II}} \\ l_1 - l_2 &= i n_{\mathrm{I}} & \qquad l_3 - l_4 &= i n_{\mathrm{II}} \end{aligned} \tag{264}$$

überführen läßt in

$$x = e^{\mu_{\mathrm{I}} t}(m_{\mathrm{I}} \cos \nu_{\mathrm{I}} t - n_{\mathrm{I}} \sin \nu_{\mathrm{I}} t) + e^{\mu_{\mathrm{II}} t} \cdot (m_{\mathrm{II}} \cos \nu_{\mathrm{II}} t - n_{\mathrm{II}} \sin \nu_{\mathrm{II}} t). \tag{265}$$

Man könnte nun zwar für beide Schwingungen wie oben mit Gl. (256) und (257) Dauer und Halbwertszeit angeben, aber es hängt offenbar ganz von den Anfangsbedingungen ab, welche der beiden Schwingungen für die aus ihrer Überlagerung resultierende Bewegung den Ausschlag gibt.

Zu dem Zweck bedarf es einer Darstellung der Variablen selbst in Abhängigkeit von der Zeit. Gleichgültig, ob wir für reelle Wurzeln λ eine der drei Veränderlichen nach Gl. (259) durch

$$x = \sum_{1 \cdot / \cdot 4} l e^{\lambda t} \tag{266}$$

oder für komplexe Wurzelpaare $\lambda = m \pm \nu i$ nach Gl. (265) durch

$$x = \sum_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} e^{\mu t}(m \cos \nu t - n \sin \nu t) \tag{267}$$

darstellen, immer lassen sich die beiden andern Veränderlichen mit Hilfe der Bewegungsgleichungen angeben mit:

$$y = \mathfrak{A} \cdot x, \qquad z = \mathfrak{B} \cdot x. \tag{268}$$

Dabei entsprechen den vier Wurzeln λ und den zugehörigen Komponenten von x vier Werte für $\mathfrak{A}$. Für komplexe Wurzeln λ nehmen freilich wie die $l = \frac{m \pm in}{2}$ auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ komplexe Werte an:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \pm i\mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{E} \pm i\mathfrak{F}. \tag{269}$$

Dann wird z. B. nach den Gl. (242) bis (246):

$$\begin{aligned}(\mathfrak{C} + i\mathfrak{D}) \left(\frac{m + in}{2}\right) e^{i\nu t} + (\mathfrak{C} - i\mathfrak{D}) \left(\frac{m - in}{2}\right) e^{-i\nu t} \\ = (\mathfrak{C}m - \mathfrak{D}n) \cos \nu t - (\mathfrak{D}m + \mathfrak{C}n) \sin \nu t\end{aligned} \tag{270}$$

und damit:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} e^{\mu t} [(\mathfrak{C}m - \mathfrak{D}n) \cos \nu t - (\mathfrak{D}m + \mathfrak{C}n) \sin \nu t] \\ z &= \sum_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} e^{\mu t} [(\mathfrak{E}m - \mathfrak{F}n) \cos \nu t - (\mathfrak{F}m + \mathfrak{E}n) \sin \nu t]. \end{aligned} \tag{271}$$

Die Voraussetzung der Unabhängigkeit der Flugzeugbewegungen von Standort und Kurs bringt es mit sich, daß in den beiden Gleichungssystemen für die Längs- und die Querbewegungen jeweils zwei der Variabeln Geschwindigkeiten sind, und wir daher über die Größe ihrer ersten Ableitungen nach der Zeit, da diese Beschleunigungen sind, für den Beginn der Betrachtung $t = 0$ keine Annahmen machen dürfen. Für die Berechnung der Bewegung stehen daher nur vier Anfangsbedingungen zur Verfügung. Tatsächlich benötigen wir auch nur vier Gleichungen, da y und z durch x vollständig gegeben sind, und x selbst sich aus zwei Schwingungen zusammensetzt, für die jeweils Phase (249) und Amplitude (247) aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

Nun gilt für $t = 0$:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum m &&= m_{\mathrm{I}} + m_{\mathrm{II}} \\ y_0 &= \sum (\mathfrak{C}m - \mathfrak{D}n) &&= \mathfrak{C}_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} + \mathfrak{C}_{\mathrm{II}} m_{\mathrm{II}} - \mathfrak{D}_{\mathrm{I}} n_{\mathrm{I}} - \mathfrak{D}_{\mathrm{II}} n_{\mathrm{II}} \\ z_0 &= \sum (\mathfrak{E}m - \mathfrak{F}n) &&= \mathfrak{E}_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} + \mathfrak{E}_{\mathrm{II}} m_{\mathrm{II}} - \mathfrak{F}_{\mathrm{I}} n_{\mathrm{I}} - \mathfrak{F}_{\mathrm{II}} n_{\mathrm{II}} \\ \dot{x}_0 &= \sum (\mu m - \nu n) &&= \mu_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} + \mu_{\mathrm{II}} m_{\mathrm{II}} - \nu_{\mathrm{I}} n_{\mathrm{I}} - \nu_{\mathrm{II}} n_{\mathrm{II}}. \end{aligned} \tag{272}$$

Demnach erhalten wir die vier Integrationskonstanten aus:

$$m_{\mathrm{I}} : (-m_{\mathrm{II}}) : (-n_{\mathrm{I}}) : n_{\mathrm{II}} : 1 =$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 \\ y_0 & \mathfrak{C}_{\mathrm{II}} & \mathfrak{D}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{D}_{\mathrm{II}} \\ z_0 & \mathfrak{E}_{\mathrm{II}} & \mathfrak{F}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{F}_{\mathrm{II}} \\ \dot{x}_0 & \mu_{\mathrm{II}} & \nu_{\mathrm{I}} & \nu_{\mathrm{II}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 \\ y_0 & \mathfrak{C}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{D}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{D}_{\mathrm{II}} \\ z_0 & \mathfrak{E}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{F}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{F}_{\mathrm{II}} \\ \dot{x}_0 & \mu_{\mathrm{I}} & \nu_{\mathrm{I}} & \nu_{\mathrm{II}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_0 & 0 & 1 & 1 \\ y_0 & \mathfrak{D}_{\mathrm{II}} & \mathfrak{C}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{C}_{\mathrm{II}} \\ z_0 & \mathfrak{F}_{\mathrm{II}} & \mathfrak{E}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{E}_{\mathrm{II}} \\ \dot{x}_0 & \nu_{\mathrm{II}} & \mu_{\mathrm{I}} & \mu_{\mathrm{II}} \end{vmatrix}$$
$$: \begin{vmatrix} x_0 & 0 & 1 & 1 \\ y_0 & \mathfrak{D}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{C}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{C}_{\mathrm{II}} \\ z_0 & \mathfrak{F}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{E}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{E}_{\mathrm{II}} \\ \dot{x}_0 & \nu_{\mathrm{I}} & \mu_{\mathrm{I}} & \mu_{\mathrm{II}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{C}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{C}_{\mathrm{II}} & \mathfrak{D}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{D}_{\mathrm{II}} \\ \mathfrak{E}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{E}_{\mathrm{II}} & \mathfrak{F}_{\mathrm{I}} & \mathfrak{F}_{\mathrm{II}} \\ \mu_{\mathrm{I}} & \mu_{\mathrm{II}} & \nu_{\mathrm{I}} & \nu_{\mathrm{II}} \end{vmatrix} \qquad (273)$$

D. Die Stabilitätsbedingungen.

Damit wird ersichtlich, welche der beiden Bewegungen für jede der Variablen jeweils den Ausschlag gibt. Man kann dann um so leichter Schlüsse ziehen, über die Größe von Kräften oder Momenten $C\ D\ E$, welche ihrerseits imstande wären, allein Bewegungen gleicher Art hervorzubringen. Man kann sich so die Gleichung 4. Grades für λ Gl. (260) entstanden denken aus dem Produkt der „charakteristischen" Gleichungen zweier voneinander unabhängiger Bewegungen:

$$\left(\lambda^2 + \frac{D_1}{C_1}\lambda + \frac{E_1}{C_1}\right)\left(\lambda^2 + \frac{D_2}{C_2}\lambda + \frac{E_2}{C_2}\right) = 0. \qquad (274)$$

Die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung nehmen dann folgende Gestalt an:

$$(275) \quad \mathfrak{K}_1^* = \frac{D_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}} + \frac{D_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}}, \qquad \mathfrak{K}_2^* = \frac{E_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}} + \frac{E_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}} + \frac{D_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}} \cdot \frac{D_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}} \quad (276)$$

$$(277) \quad \mathfrak{K}_3^* = \frac{D_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}} \cdot \frac{E_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}} + \frac{D_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}} \cdot \frac{E_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}}, \qquad \mathfrak{K}^* = \frac{E_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}} \cdot \frac{E_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}} \quad (278)$$

und haben bestimmte mathematische Bedingungen zu erfüllen, um zu zeigen, daß sowohl die rückführenden Kräfte und Kräftepaare E wie auch die Dämpfungen D positiv sind. Hurwitz (Lit. 20) hat diesen Bedingungen die Form gegeben, daß

$$\mathfrak{K}_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{K}_1 & \mathfrak{K}_3 \\ 1 & \mathfrak{K}_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{K}_1 & \mathfrak{K}_3 & 0 \\ 1 & \mathfrak{K}_2 & \mathfrak{K}_4 \\ 0 & \mathfrak{K}_1 & \mathfrak{K}_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{K}_1 & \mathfrak{K}_3 & 0 & 0 \\ 1 & \mathfrak{K}_2 & \mathfrak{K}_4 & 0 \\ 0 & \mathfrak{K}_1 & \mathfrak{K}_3 & 0 \\ 0 & 1 & \mathfrak{K}_2 & \mathfrak{K}_4 \end{vmatrix} > 0 \qquad (279)$$

sein müsse. Durch einfache Umgestaltungen gelangt man zu den Ungleichungen:

$$\mathfrak{K}_1 > 0, \quad \mathfrak{K}_2 > 0, \quad \mathfrak{K}_3 > 0, \quad \mathfrak{K}_4 > 0, \qquad (280)$$

zu denen dann noch die dreizeilige Determinante

$$\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{K}_4 \cdot \mathfrak{K}_1^2 - \mathfrak{K}_3^2 > 0 \quad \text{tritt.} \tag{281}$$

$\mathfrak{K}_4 > 0$ bestimmt zunächst nur gleiches Vorzeichen für beide E. Sollte dies aber negativ sein, so wird es bei ungleichen Vorzeichen der D durch $\mathfrak{K}_2$, bei gleichen durch $\mathfrak{K}_3$ angezeigt. Denn wenn die D gleiches Vorzeichen haben, muß es wegen $\mathfrak{K}_1 > 0$ positiv sein. Es bedarf nur noch einer Bedingung, die für die D gleiches Vorzeichen fordert. Dies und nichts anderes leistet die dreigliedrige Determinante. Führt man dort die Gl. (275) bis (278) ein, so folgt:

$$\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{K}_4\mathfrak{K}_1^2 - \mathfrak{K}_3^2 = \frac{D_I}{C_I} \cdot \frac{D_{II}}{C_{II}} \left[\left(\frac{E_I}{C_I} - \frac{E_{II}}{C_{II}} \right)^2 + \mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_3 \right] > 0. \tag{282}$$

Die Klammer ist notwendig positiv; denn das erste Glied ist unabhängig von Größe und Vorzeichen der E positiv und von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ wird dies von vornherein verlangt. Sind nun durch die Elimination der Variablen aus den Bewegungsgleichungen die Koeffizienten der Frequenzgleichung algebraisch berechnet, so genügt es, sie mit den Gleichungen (275) bis (278) zu vergleichen, um zum mindesten vorläufige Werte für die D und E zu finden. Dann hat man nur noch den D und E durch konstruktive Maßnahmen zu positiven Werten zu verhelfen, um auch den mathematischen Stabilitätsbedingungen innerhalb des Bereichs ihrer Gültigkeit Genüge zu tun.

E. Die Verbesserung von Näherungslösungen.

Scheinen die in solcher Weise mit den Gl. (241), (254) und (255) näherungsweise gewonnenen Werte λ zu ungenau, so kann man nach Newton ihre Werte mit

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda^4 + \mathfrak{K}_1\lambda^3 + \mathfrak{K}_2\lambda^2 + \mathfrak{K}_3\lambda + \mathfrak{K}_4}{4\lambda^4 + 3\mathfrak{K}_1\lambda^3 + 2\mathfrak{K}_2\lambda^2 + \mathfrak{K}_3\lambda} \tag{283}$$

verbessern, worin natürlich die $\mathfrak{K}_1$ bis $\mathfrak{K}_4$ die genauen Werte erhalten, wie sie aus den Bewegungsgleichungen folgen. Sind die Wurzeln konjugiert komplex:

$$\lambda = \mu \pm i\nu, \tag{284}$$

so verwende man für Gl. (283) die bekannte Rechenregel:

$$\Delta\lambda = \frac{a \pm ib}{c \pm id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \pm i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

also

$$\Delta\mu = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \qquad \Delta\nu = \pm\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}, \tag{285}$$

worin:

$$\begin{aligned} a &= \alpha^2 - \gamma^2 + \mathfrak{R}_1\beta + \mathfrak{R}_2\alpha + \mathfrak{R}_3\mu + \mathfrak{R}_4 \\ b &= 2\alpha\gamma + \mathfrak{R}_1\delta + \mathfrak{R}_2\gamma + \mathfrak{R}_3\nu \\ c &= 4\beta + 3\mathfrak{R}_1\alpha + 2\mathfrak{R}_2\mu + \mathfrak{R}_3 \\ d &= 4\delta + 3\mathfrak{R}_1\gamma + 2\mathfrak{R}_2\nu \end{aligned} \qquad (286)$$

wenn α, β die reellen, γ, δ die imaginären Anteile der höheren Potenzen von $\lambda = \mu \pm i\nu$ bedeuten.

$$\alpha = \mu^2 - \nu^2, \quad \beta = \mu(\mu^2 - 3\nu^2), \quad \gamma = 2\mu\nu, \quad \delta = \nu(3\mu^2 - \nu^2). \qquad (287)$$

Da ν linear lediglich als gemeinsamer Faktor in b und d vorkommt, ist sein Vorzeichen, wie erforderlich, auf $\Delta\mu$ ohne Einfluß, bestimmt jedoch das Vorzeichen von $\Delta\nu$, so daß der absolute Betrag $\nu + \Delta\nu$ für beide Vorzeichen tatsächlich derselbe ist.

VI. Die Berechnung der Längsbewegungen.

A. Die Bewegungsgleichungen.

Wir gehen nun zur Betrachtung der ersten Gruppe der Bewegungsgleichungen über, aus denen die konstruktiven Forderungen für die Längsstabilität und Längssteuerung abzuleiten sind. Die Wahl der drei Veränderlichen zur vollständigen Beschreibung der Bewegungen, die sich ohne Lagenänderung der Symmetrieebene vollziehen, liegt nahe. Die Luftkräfte erwiesen sich für ein gegebenes Flugzeug als abhängig von zwei Veränderlichen: der Stellung des Flugzeugs gegenüber der augenblicklichen Flugrichtung und der Größe der Geschwindigkeit. Außer den Luftkräften wirkt als äußere Kraft nur noch das Gewicht. Es tritt zu Auftrieb und Rücktrieb in unmittelbare Beziehung durch Zerlegung in Komponenten senkrecht zur und in der Flugrichtung. Diese selbst wird daher als die dritte Veränderliche eingeführt. Die Richtung des stetigen Fluges schließe mit der wagerechten Ebene den Winkel ϑ ein (positiv im Sinne des Anstellwinkels, also beim Anstieg). Die Änderungen dieses Winkels werden mit τ, die des Anstellwinkels mit δ, die verhältnismäßigen Änderungen der Geschwindigkeit mit $\mathfrak{w}$ bezeichnet. Ferner bedeuten:

G kg	Gewicht des Flugzeugs,
M_q kgm	Moment der Luftkräfte um die wagerechte Querachse; positiv im Sinne des Anstellwinkels.
S kg	Schub der Schraube
X kg	Komponente der Luftkraft entgegen der Flugrichtung (Rücktrieb).
Y kg	Komponente der Luftkraft senkrecht zur Flugrichtung (Auftrieb).

U V kg sk W kg m sk	Änderungen von X Y M_q mit der Winkelgeschwindigkeit $(\dot{\delta} + \dot{\tau})$ um die wagerechte Querachse
X' Y' kg M' kg m	Änderungen von X Y M_q mit dem Anstellwinkel des vordersten Flügels.
r_q m	Trägheitshalbmesser für die wagerechte Querachse.
s m	Abstand des Schubs vom Schwerpunkt; positiv, wenn der Schwerpunkt über der Schraubenachse liegt.
t sk	Zeit
v m/sk	Geschwindigkeit des stetigen Fluges
β_s	„Anstellwinkel des Schubs" d. h. Winkel zwischen Flugrichtung und Propellerachse.
χ_s	die verhältnismäßige Abnahme des Schubs mit der Steigerung der Geschwindigkeit.

Dann sind die dynamischen Gleichungen der Kräfte in der Flugrichtung und senkrecht dazu, sowie der Momente:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{d}{dt}(\omega \cdot v) = -G \sin(\vartheta + \tau) - X(1 + 2\omega) - X'\delta - U\frac{d}{dt}(\delta + \tau) + S(1 - \chi_s\omega)\cos(\beta_s + \delta) \tag{288}$$

$$\frac{G}{g} \cdot v \cdot \frac{d\tau}{dt} = -G\cos(\vartheta + \tau) + Y(1 + 2\omega) + Y'\delta + V\frac{d}{dt}(\delta + \tau) + S(1 - \chi_s\omega)\sin(\beta_s + \delta) \tag{289}$$

$$\frac{G}{g} \cdot r_q^2 \frac{d^2}{dt^2}(\delta + \tau) = + M_q(1 + 2\omega) + M_q'\delta + W\frac{d}{dt}(\delta + \tau) + Ss(1 - \chi_s\omega). \tag{290}$$

Für stetigen Flug verschwinden die Störungen δ, τ, ω und ihre Ableitungen:

$$-G\sin\vartheta - X - S\cos\beta_s = 0 \tag{291}$$

$$-G\cos\vartheta + Y + S\sin\beta_s = 0 \tag{292}$$

$$M_q + Ss = 0. \tag{293}$$

Es entspricht nicht der Genauigkeit, die man von diesen Rechnungen in Rücksicht auf ihren infinitesimalen Charakter überhaupt fordern darf, Größen, die von zweiter Ordnung klein sind, beizubehalten. Danach sind die Cosinus der kleinen Winkel β_s und ϑ der Einheit gleich zu setzen. Es ist ferner in Gl. (292) $S \sin \beta_s$ gegenüber G zu vernachlässigen. Bezeichnen wir noch kurz:

(294) $\quad \frac{X}{Y} = \varepsilon \qquad \frac{S}{G} = \sigma, \quad$ (295)

so ergeben sich die in Übereinstimmung mit den Gl. (56) und (57) vereinfachten Gleichgewichtsbedingungen des stetigen Fluges als:

(296) $\quad \operatorname{tg}\vartheta = \sigma - \varepsilon, \qquad G = Y, \qquad M_q = -Ss. \quad$ (297) (298)

Führen wir sie in die Bewegungsgleichungen ein und bezeichnen, wie üblich, die Anzahl der Ableitungen nach der Zeit durch Punkte, so erhalten wir:

$$\frac{v}{g}\cdot\dot{\omega} = -\tau - 2\varepsilon\omega - \frac{X'}{Y}\cdot\delta - \frac{U}{Y}(\dot{\delta}+\dot{\tau}) - \sigma(\chi_s\omega + \sin\beta\cdot\delta) \quad (299)$$

$$\frac{v}{g}\cdot\dot{\tau} = \operatorname{tg}\vartheta\cdot\tau + 2\omega + \frac{Y'}{Y}\cdot\delta + \frac{V}{Y}(\dot{\delta}+\dot{\tau}) - \sigma(\chi_s\omega\sin\beta - \delta) \quad (300)$$

$$\frac{r^2}{g}\cdot(\ddot{\delta}+\ddot{\tau}) = \frac{M_q'}{Y}\cdot\delta + \frac{W}{Y}(\dot{\delta}+\dot{\tau}) - (2+\chi_s)\,\sigma s\omega. \quad (301)$$

B. Die Berechnung der Gleichungskonstanten.

Bevor wir die Bewegungsgleichungen weiter entwickeln, haben wir uns Rechenschaft zu geben über die Größenordnung der in ihr enthaltenen Konstanten, um durch Vernachlässigung der von zweiter Ordnung kleinen Glieder im weiteren Verlauf der Rechnung die Übersichtlichkeit wahren zu können. Ohne Einschränkung auf besondere Voraussetzungen kennen wir bisher lediglich aus dem vorletzten Abschnitt M_q (230) und M_q' (231). Für veränderliche Flügeltiefen und Anstellwinkel ergibt sich mit den dort gebrauchten Bezeichnungen Y aus:

$$Y = \varrho v^2 \sum 2\int_0^{\frac{b}{2}}\left(\eta+\vartheta-2\vartheta\frac{2z}{b}\right)\left(t+u-2u\frac{2z}{b}\right)dz = \varrho v^2\sum b\left(\eta t+\frac{\vartheta u}{3}\right) \quad (302)$$

und
$$Y' = \varrho v^2 \sum \eta' b t. \quad (303)$$

Während sich also Y' ohne Rücksicht auf das Maß der Veränderlichkeit der Flügeltiefen und Anstellwinkel lediglich abhängig von den Mittelwerten zeigt, nimmt Y mit dem Maß der Veränderlichkeit zu, da die gleichzeitige Vergrößerung der Flügeltiefe und des Anstellwinkels nach der Mitte die Abnahme nach dem Rande überwiegt. Das Verhältnis der Konstanten $\frac{Y}{Y'}$ hat die Bedeutung eines „wirksamen Anstellwinkels des Flugzeugs“:

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Y}'} = \alpha. \quad (304)$$

Dieser Winkel ist aus doppelten Gründen von dem sogenannten „meßbaren“ Anstellwinkel β, Gl. (3), zu unterscheiden. Wir haben schon im ersten Abschnitt gezeigt, daß gewölbte Flächen selbst dann Auftrieb erfahren, wenn die Sehne des Profils der Flugrichtung parallel ist, also der meßbare Anstellwinkel tatsächlich verschwindet. Zudem zeigt sich in diagrammatischen Darstellungen der Auftriebszahl über dem Anstellwinkel immer eine schwache mit wachsendem η zunehmende Krümmung der Kurve, und wenn wir dem Diagramm die Subtangente $\frac{Y}{Y'}$ oder $\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Y}'}$

entnehmen, ist sie größer als der Abschnitt auf der Abszissenachse zwischen der gegebenen Ordinate und der Kurve selbst, die die Abszissenachse im Punkte $\beta = -\gamma$ schneidet.

Um andererseits die an sich mühselige Berechnung des induzierten Widerstandes durch die Voraussetzung veränderlicher Abmessungen nicht auch noch zu belasten, können wir für die entsprechenden kleinen endlichen Änderungen des Auftriebs

$$\Delta\mathfrak{Y} = \sum b\vartheta\,\frac{u}{3} \tag{305}$$

den darausfolgenden Zuwachs des induzierten Widerstandes einfach aus Gl. (146) ermitteln:

$$\Delta\mathfrak{X} = \Delta\mathfrak{Z} = \frac{2\mathfrak{Y}}{8}\,\Delta\mathfrak{Y} = \frac{2\mathfrak{Y}'}{8}\cdot\alpha\cdot\Delta\mathfrak{Y}. \tag{306}$$

Diese Gleichung können wir ohne weiteres auch für die Berechnung der Gleichungskonstanten $\frac{X'}{Y}$ und $\frac{U}{Y}$ verwenden, die mit der Definition

$$\varkappa = \frac{2\mathfrak{Y}'}{8} \tag{307}$$

folgen als

$$\frac{X'}{Y} = \frac{d\mathfrak{X}}{d\alpha} : \mathfrak{Y} = \frac{d\mathfrak{X}}{d\mathfrak{Y}}\cdot\frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}} = \varkappa \tag{308}$$

$$\frac{U}{Y} = \varkappa\cdot\alpha\,\frac{V}{Y}\cdot \tag{309}$$

Die Berechnung der Änderungen V und W des Auftriebs und des Moments mit der Winkelgeschwindigkeit um die wagerechte Querachse erfordert eine Voraussetzung über die Größe der für den ganzen Flügel „wirksamen“ Umfangsgeschwindigkeit. Da der vordere Teil eines Flügels einen weitsaus größeren Betrag zur Tragfähigkeit des ganzen Flügels liefert als der hintere, ist es nicht angängig, hier einfach die Umfangsgeschwindigkeit der Flügelmitte als wirksam anzusprechen; vielmehr wird derjenige Punkt, dessen Umfangsgeschwindigkeit die aus der Winkelgeschwindigkeit resultierende „wirksame“ Anstellwinkeländerung bestimmt, im Profil erheblich vor der Mitte, liegen, und wir werden kaum weit fehl gehen, wenn wir annehmen, daß er in $\chi\cdot t$, also $^3/_4$ der Flügeltiefe von der Hinterkante entfernt liegt. Dann wird also für jedes Flügelelement mit den Bezeichnungen der Fig. 32:

$$-\Delta\beta = \left(d - k\,\frac{2z}{b} + \chi\left[t + u - 2u\,\frac{2z}{b}\right]\right)\cdot(\dot\delta + \dot\tau) : v \tag{310}$$

und damit

$$V = -\varrho\cdot v\sum 2\int_0^{\frac{b}{2}}\eta'\left[d - k\frac{2z}{b} + \chi\left(t + u - 2u\,\frac{2z}{b}\right]\right)\left(t + u - 2u\frac{2z}{b}\right)\cdot dz \tag{311}$$

$$= -\varrho\cdot v\sum\eta' b\left[t\left(d - \frac{k}{2} + \chi t\right) + \frac{u}{3}\left(\frac{k}{2} + \chi u\right)\right]\cdot \tag{312}$$

Die durchaus plausible Annahme, die wir mit Gl. (310) über die Größe der „wirksamen Anstellwinkeländerung“ durch die Winkelgeschwindigkeit gemacht haben, führt also nach den Gl. (231) und (312) auf die einfache Beziehung: $$-vV = M_q', \tag{313}$$ der man ohne weiteres nach Gl. (309) anschließen kann:

$$-vU = \varkappa \cdot \alpha \cdot M_q'. \tag{314}$$

Schließlich liefert Gl. (310) auch für das Dämpfungsmoment W eine besonders einfache Beziehung. Denn dieses Moment folgt aus dem Ansatz der Gl. (230), wenn man darin statt der örtlichen Auftriebszahl $\left(\eta + \vartheta - 2\vartheta\frac{2z}{b}\right)$ ihre Änderung durch die Winkelgeschwindigkeit $\eta' \cdot \varDelta\beta$ einführt. Dann lassen sich die beiden Integrale von vornherein zusammenfassen:

$$\begin{aligned} W &= -\varrho \cdot v \sum 2 \int_0^{\frac{b}{2}} \eta' \left(d - k\frac{2z}{b} + \chi\left[t + u - 2u\frac{2z}{b}\right]\right)^2 \cdot \left(t + u - 2u\frac{2z}{b}\right) dz \\ &= -\varrho \cdot v \sum \eta' b \left(t\left[\left(d - \frac{k}{2} + \chi t\right)^2 + \frac{1}{12}\left(k + 2\chi u\right)^2\right]\right. \\ &\qquad \left. + \frac{u}{3}\left(d - \frac{k}{2} + \chi t\right)\left(k + 2\chi u\right)\right). \end{aligned} \tag{315}$$

Für das Dämpfungsmoment W ist also, wenn die Stabilisierung durch Flossen geschieht, $k = 0$, $u = 0$, in erster Linie das Dämpfungsmoment der Flossen $$W_F = -\varrho \cdot v \sum \eta' b t (d + \chi t)^2; \tag{316}$$ wenn die Stabilisierung durch Pfeilform geschieht, also für Indifferenz $\left(d - \frac{k}{2} + \chi t\right)$ verschwindet, bei unveränderlicher Flügeltiefe $u = 0$ allein das zweite Glied der Gl. (315) maßgebend:

$$W = -\varrho \cdot v \sum \eta' b t \frac{k^2}{12}. \tag{317}$$

Schließlich haben wir noch an Hand der logarithmischen Darstellung der Schraubencharakteristik Fig. 23 die Größe von χ_s zu bestimmen. Wir haben χ_s oben als verhältnismäßige Abnahme des Schubes für die Einheit der verhältnismäßigen Zunahme der Geschwindigkeit bezeichnet. Arbeitet die Schraube bei unveränderlicher Motorleistung im Wirkungsgradmaximum, so ist ihre Nutzleistung in (unendlich) kleinem Bereich unveränderlich, und verhältnismäßig nimmt dann der Schub ebensoviel ab als die Geschwindigkeit zunimmt; das entspräche dem Wert $\chi_s = 1$. Tatsächlich ist aber nicht die Leistung, sondern nur das Drehmoment des Motors in gegebener Höhe unveränderlich. Dann folgt aus der Gl. (188)

$$\frac{d\mu_s}{\mu^s} = -2\frac{dn}{n}, \tag{318}$$

d. h. entsprechend der Abnahme der Drehwiderstandszahl μ_s mit steigender Geschwindigkeit, nimmt mit dieser auch die Drehleistung und damit die Motorleistung zu. Der Schub nimmt also nach Überschreiten des Wirkungsgradmaximums weniger stark ab als dem Abfall des Wirkungsgrades entspricht.

Man erhält dafür die folgenden Beziehungen:

Der Definition entspricht

$$\chi_s = -\frac{dS}{S} : \frac{dv}{v}. \tag{319}$$

Nun ist nach Gl. (170):

$$\frac{d\lambda_s}{\lambda_s} = \frac{dv}{v} - \frac{dn}{n}, \tag{320}$$

worin wir Gl. (318) einzuführen haben:

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\lambda_s}{\lambda_s} - \frac{1}{2}\frac{d\mu_s}{\mu_s}. \tag{321}$$

Andererseits ist der Schraubenwirkungsgrad nach Gl. (173):

$$\eta_s = \frac{S \cdot v}{M_M \cdot \frac{u}{R}} = \frac{S}{M_M} \cdot \lambda_s \cdot R \tag{322}$$

und damit für unveränderliches Drehmoment M_M des Motors

$$\frac{d\eta_s}{\eta_s} = \frac{dS}{S} + \frac{d\lambda_s}{\lambda_s}. \tag{323}$$

Führen wir hierin Gl. (319), (320) ein, so folgt aus

$$\frac{d\eta_s}{\eta_s} = -\chi_s\left(\frac{d\lambda_s}{\lambda_s} - \frac{1}{2}\frac{d\mu_s}{\mu_s}\right) + \frac{d\lambda_s}{\lambda_s} \tag{324}$$

mit Gl. (193)

$$\chi_s = \frac{1 - \frac{d\lg\eta_s}{d\lg\lambda_s}}{1 - \frac{1}{2}\frac{d\lg\mu_s}{d\lg\lambda_s}}. \tag{325}$$

Nun ist nach Fig. 23 die Tangente an die μ-Kurve immer negativ, also der Nenner von Gl. (325) gleich oder größer als Eins. χ_s ist also bis zum und für das Wirkungsgradmaximum erheblich kleiner als eins und erreicht nur jenseits desselben gelegentlich größere Beträge.

C. Die Bestimmung von Näherungslösungen.

Im vorstehenden Abschnitt haben wir gezeigt, daß α, s und σ wie β_s in gleicher Größenordnung liegen, und der Einheit gegenüber von erster Ordnung klein sind. Danach können wir in den beiden ersten Bewegungsgleichungen (299), (300) die Glieder mit σ vernachlässigen bis

auf das Glied $\chi_s \sigma \omega$ in Gl. (299), das natürlich gegenüber $2\varepsilon\omega$ nicht außer acht fallen darf. Wir führen in die Bewegungsgleichungen nun entsprechend der Substitution $x \sim e^{\lambda t}$,

$$\dot{\vartheta} = \lambda \vartheta \quad \ddot{\vartheta} = \lambda^2 \vartheta, \qquad \dot{\tau} = \lambda \tau \quad \ddot{\tau} = \lambda^2 \tau, \qquad \dot{\omega} = \lambda \omega \tag{326}$$

ein. Definieren wir noch mit

$$2h = \frac{v^2}{g}, \tag{327}$$

so lauten nunmehr die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{v\lambda}{g} \cdot \omega = -\tau - (2\varepsilon + \chi_s \sigma)\,\omega - \frac{X'}{Y} \cdot \vartheta - \frac{Uv}{Y2h}\,\frac{v\lambda}{g}\,(\vartheta + \tau) \tag{328}$$

$$\frac{v\lambda}{g} \cdot \tau = \operatorname{tg} \vartheta \cdot \tau + 2\omega + \frac{Y'}{Y} \cdot \vartheta + \frac{Vv}{Y2h} \cdot \frac{v\lambda}{g}(\vartheta + \tau) \tag{329}$$

$$\frac{v^2\lambda^2}{g^2} \cdot (\vartheta + \tau) = -(2 + \chi_s)\,\sigma\,\frac{2hs}{r^2}\,\omega + \frac{M_q' 2h}{Y \cdot r^2}\vartheta + \frac{Wv}{Y \cdot r^2}\,\frac{v\lambda}{g}(\vartheta + \tau). \tag{330}$$

Wir führen nun statt der schwerfälligen Gleichungskonstanten, die wir durch die Umformung zu reinen Zahlen gemacht haben, neue Bezeichnungen ein, wie sie teilweise schon aus den letzten Seiten bekannt sind:

$$\begin{aligned}
&\frac{X'}{Y} = \varkappa & &\frac{U \cdot v}{Y \cdot 2h} \cong -\varkappa \cdot \alpha & &\frac{M_q'}{Y \cdot 2h} = \varkappa \cdot \alpha \cdot j \\
&\frac{Y'}{Y} = \frac{1}{\alpha} & &\frac{V \cdot v}{Y \cdot 2h} \cong - & &\frac{M_q'}{Y \cdot 2h} = j \\
&(2 + \chi_s)\,\sigma\,\frac{2hs}{r_q^2} = p & &-\frac{M_q' 2h}{Y \cdot r_q^2} = q & &-\frac{W \cdot v}{Y \cdot r_q^2} = w
\end{aligned} \tag{331}$$

und definieren das Beschleunigungsverhältnis:

$$\varLambda = \frac{v\lambda}{g}. \tag{332}$$

Ordnen wir dann die Bewegungsgleichungen nach den Veränderlichen ϑ, τ, ω, so erhalten wir

$$\varkappa(1 + \alpha j \varLambda)\,\vartheta + (1 + \varkappa \alpha j \varLambda)\,\tau + (2\varepsilon + \chi_s \sigma + \varLambda)\,\omega = 0 \tag{333}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + j\varLambda\right)\,\vartheta + (\sigma - \varepsilon - \varLambda[1 - j])\,\tau + 2\omega = 0 \tag{334}$$

$$(q + w\varLambda + \varLambda^2)\,\vartheta + (w\varLambda + \varLambda^2)\,\tau + p\omega = 0. \tag{335}$$

Die drei Gleichungen können nur bestehen, wenn die Determinante ihrer Koeffizienten verschwindet. Wir ziehen in dieser die zweite Kolonne von der ersten ab und erhalten:

$$\begin{vmatrix}
\varkappa - 1 & 1 + \varkappa \alpha j \varLambda & 2\varepsilon + \chi_s \sigma + \varLambda \\
\frac{1}{\alpha} + \varepsilon - \sigma + \varLambda & \sigma - \varepsilon - [1 - j]\varLambda & 2 \\
q & w\varLambda + \varLambda^2 & p
\end{vmatrix} = 0 \tag{336}$$

Ordnen wir nach Potenzen von Λ, so ergeben sich für die Koeffizienten der biquadratischen Gleichung (260):

$$\Lambda^4 + \mathfrak{K}_1 \Lambda^3 + \mathfrak{K}_2 \Lambda^2 + \mathfrak{K}_3 \Lambda + \mathfrak{K}_4 = 0 \tag{337}$$

folgende Werte:

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{1}{\alpha} + w + 3\varepsilon - (1-\chi_s)\,\sigma$$

$$\mathfrak{K}_2 = q(1-j) + w\left[3\varepsilon - (1-\chi_s)\,\sigma + \frac{1}{\alpha}\right] + \left(2\varepsilon + \chi_s\sigma\right)\left(\varepsilon - \sigma + \frac{1}{\alpha}\right) + 2 - 2\varkappa - \varkappa\alpha j p$$

$$\mathfrak{K}_3 = q\,[3\varepsilon - (1-\chi_s)\,\sigma - j(2\varepsilon + \chi_s\sigma - 2\varkappa\alpha)] + w\left[2 - 2\varkappa + (2\varepsilon + \chi_s\sigma)\left(\varepsilon - \sigma + \frac{1}{\alpha}\right)\right] - p\left[\varkappa + j(1 + \varkappa\alpha[\varepsilon - \sigma])\right] \tag{338}$$

$$\mathfrak{K}_4 = q\,[2 + (\varepsilon - \sigma)\,(2\varepsilon + \chi_s\sigma)] - \frac{p}{\alpha}\,[1 + \varkappa\alpha\,(\varepsilon - \sigma)]\,.$$

Nun ist nach der Definition (331)

$$j = q\left(\frac{r}{2h}\right)^2 \tag{339}$$

für die in Frage stehenden dynamisch vorteilhaften Stabilitätsgrade unbeträchtlich gegenüber Eins. Denn für nur 100 km/st Geschwindigkeit wird schon $2h = 80$ m und der Trägheitsradius r liegt in der Größenordnung der Tragflügeltiefen.

Vernachlässigen wir auch noch die Produkte der von erster Ordnung kleinen Größen miteinander und bezeichnen mit

$$(340)\qquad a = 3\varepsilon - (1-\chi_s)\sigma, \qquad b = 2\varepsilon - 2\varkappa\alpha + \chi_s\sigma + 2\alpha \qquad (341)$$

so vereinfachen sich die Koeffizienten außerordentlich:

$$(342)\qquad \mathfrak{K}_1 = w + \frac{1}{\alpha} + a, \qquad \mathfrak{K}_2 = q + \frac{b}{\alpha} + w\left(\frac{1}{\alpha} + a\right), \quad (343)$$

$$(344)\qquad \mathfrak{K}_3 = q \cdot a + w \cdot \frac{b}{\alpha} - p\varkappa, \quad \mathfrak{K}_4 = 2q - \frac{p}{\alpha}. \qquad (345)$$

Wir haben nun die Aufgabe, aus dem Vergleich dieser Koeffizienten mit ihrer notwendigen Form [Gl. (275) bis (278)] plausible Näherungswerte für $\frac{D_I}{C_I}\,\frac{D_{II}}{C_{II}}\,\frac{E_I}{C_I}\,\frac{E_{II}}{C_{II}}$ zu suchen. Betrachtet man die Koeffizienten $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ allein, so könnte man versucht sein, die Dämpfungen mit w bzw. $\frac{1}{\alpha} + a$ und die elastischen Momente mit q bzw. $\frac{b}{\alpha}$ zu bezeichnen. Bilden wir jedoch die entsprechenden Produkte für den Faktor $\mathfrak{K}_3$, so widerspricht diesen Annahmen die tatsächliche Form des Koeffizienten, da er das überaus beträchtliche von diesen Näherungen geforderte Glied $\frac{q}{\alpha}$ nicht

enthält. Lassen wir zunächst p immer noch außer acht, — p verschwindet für Gleitflug und wenn die Schubrichtung durch den Schwerpunkt geht (zentrischer Schub) —, so sieht man sich genötigt, im Koeffizienten $\mathfrak{K}_1$ $w + \frac{1}{\alpha}$ bzw. a als Dämpfungen, in $\mathfrak{K}_2$ $q + \frac{w}{\alpha}$ als das elastische Moment der einen Schwingung anzusprechen. Nun sind a und b von gleicher Größenordnung. Nach Aussage des Koeffizienten $\mathfrak{K}_2$ muß daher das elastische Moment der andern Schwingung, zum mindesten gegenüber $q + \frac{w}{\alpha}$, sehr klein sein. Dies besagt ja auch der Koeffizient $\mathfrak{K}_3$, der wesentlich nur das elastische Moment der einen Schwingung $q + \frac{w}{\alpha}$ im Produkt mit dem Dämpfungsmoment a der anderen enthält. Und tatsächlich folgt aus dem Koeffizienten $\mathfrak{K}_4$, wenn wir in ihn das elastische Moment $q + \frac{w}{\alpha}$ hineindividieren, für das elastische Moment der andern Schwingung $\frac{2\alpha q}{\alpha q + w}$, d. h. ein Ausdruck, der sich gewöhnlich nur wenig von der Einheit unterscheidet. Nichts spricht dagegen, die Bestimmung der Näherungslösung in gleicher Weise für endliches p zu vollziehen. Wir erhalten dann also schließlich:

$$\text{(346)} \quad \frac{D_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}} = w + \frac{1}{\alpha} \qquad \frac{E_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}} = q + \frac{w}{\alpha} \qquad \frac{E_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}} = \frac{2\alpha q - p}{\alpha q + w}. \quad \text{(347) (348)}$$

Unbestimmt ist lediglich noch die Dämpfung $\frac{D_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}}$. Denn da sie zweifellos gegenüber $\frac{D_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}}$ und $\frac{E_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}}$ klein ist, weil sie ja in der Größenordnung von a und b liegt, können wir zu ihrer endgültigen Bestimmung diejenigen Koeffizienten, in denen sie in Summe mit $\frac{D_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}}$ bzw. $\frac{E_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}}$ erscheint, also $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ nicht heranziehen. Da $\mathfrak{K}_4$ überhaupt nur die elastischen Momente enthält, bleibt zur Bestimmung also lediglich $\mathfrak{K}_3$ übrig, das $\frac{D_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}}$ im Produkt mit dem beträchtlichen $\frac{E_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}}$ enthält. Aus den Gl. (346) bis (348) folgt nun nach Gl. (277) für Gl. (344):

$$\left(w + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{2\alpha q - p}{\alpha q + w} + \frac{D_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}} \left(q + \frac{w}{\alpha}\right) = q \cdot a + w \cdot \frac{b}{\alpha} - p\varkappa \tag{349}$$

$$\frac{D_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}} = a + \frac{cw - \varkappa p}{\alpha q + w}\,\alpha - \frac{(1 + \alpha w)(2\alpha q - p)}{(\alpha q + w)^2}, \tag{350}$$

worin nach Gl. (340) (341):

$$c = \frac{b - a}{\alpha} = \frac{\sigma - \varepsilon}{\alpha} + 2(1 - \varkappa). \tag{351}$$

Um aus den durch Gl. (346) bis (348) und (350) dargestellten Näherungslösungen Schlüsse auf die Erfordernisse der Stabilisierung zu ziehen, müssen wir die mit (331) definierten Konstanten der Bewegungsgleichungen so weit als möglich von dem Einfluß des Betriebszustandes befreien. Kennzeichnen wir diesen in erster Linie durch den „wirksamen" Anstellwinkel, Gl. (304), so zeigt sich, mit Gl. (56), daß auch

$$2h = \frac{v^2}{g} = \frac{G}{g \cdot \varrho \mathfrak{Y}' \alpha} \tag{352}$$

vor allem von diesem abhängt. Hingegen sind die Werte $Y' M_q'$ in nur untergeordneten und W gewöhnlich in verschwindendem Maße vom Anstellwinkel, und damit vom Betriebszustand, abhängig. Diese Abhängigkeit, die für den Eindecker überhaupt vernachlässigt werden kann, wächst mit der Anzahl der Decken und mit der Annäherung derselben aneinander (S. 14). Man erhält jedoch einen recht guten Überblick, wenn man diese Abhängigkeit vorläufig außer acht läßt und die drei erwähnten Werte dementsprechend mehr der Größenordnung als der absoluten Größe nach einführt. Wir heben also aus den Gleichungskonstanten (331) nur den Anstellwinkel selbst heraus und schreiben die neuen Konstanten, die dann gewissermaßen als Konstanten des Flugzeugs anzusprechen sind, zur Unterscheidung mit deutschen Buchstaben

$$\mathfrak{p} = p \cdot \alpha = (2 + \chi_s)\, \sigma \cdot \frac{G \cdot s}{g \cdot \varrho \cdot \mathfrak{Y}' r^2}, \tag{353}$$

$$\text{(354)} \quad \mathfrak{q} = q \cdot \alpha^2 = -\frac{M_q'}{Y'} \cdot \frac{G}{g \cdot \varrho \cdot \mathfrak{Y}' r^2}, \qquad \mathfrak{w} = w \cdot \alpha = -\frac{W v}{Y' r^2}. \quad \text{(355)}$$

Dementsprechend vereinfachen sich die Gl. (346) bis (348) und (350) wie folgt:

$$\text{(356)} \quad \frac{D_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{\alpha}(1 + \mathfrak{w}) \qquad \frac{E_{\mathrm{I}}}{C_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{\alpha^2}(\mathfrak{q} + \mathfrak{w}) \quad \text{(357)}$$

$$\text{(358)} \quad \frac{D_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}} = a + \frac{c\mathfrak{w} - \varkappa \mathfrak{p}}{\mathfrak{q} + \mathfrak{w}} \cdot \alpha - \frac{(1 + \mathfrak{w})(2\mathfrak{q} - \mathfrak{p})}{(\mathfrak{q} + \mathfrak{w})^2}\, \alpha \qquad \frac{E_{\mathrm{II}}}{C_{\mathrm{II}}} = \frac{2\mathfrak{q} - \mathfrak{p}}{\mathfrak{q} + \mathfrak{w}}. \quad \text{(359)}$$

Nach Gl. (340), (351) enthalten a und c in Gl. (358) die Gleitwinkeltangente ε, Gl. (294). Nach Gl. (53) und (139) ist

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{P}}{\mathfrak{Y}} + \frac{\mathfrak{Y}}{8} = \frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{P}}{\mathfrak{Y}'} \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{\mathfrak{Y}'}{8} \cdot \alpha = \frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{P}}{\mathfrak{Y}'} \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{\varkappa}{2}\, \alpha. \tag{360}$$

Nach Gl. (296) ist $\qquad \sigma = \varepsilon + \operatorname{tg} \vartheta. \qquad$ (361)

σ ergibt sich also aus Gl. (360) und dem Verhältnis der Steiggeschwindigkeit zur Eigengeschwindigkeit

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{60\, \Delta H}{V\, \Delta \tau_H} \tag{362}$$

und indem wir diese Größen in Gl. (358) einführen, erhalten wir

$$\frac{D_{II}}{C_{II}} = (2+\chi_s)\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{P}}{\mathfrak{Y}'}\cdot\frac{1}{\alpha} + \alpha\left[\frac{2+\chi_s}{2}\cdot\varkappa + (1-\varkappa)\frac{2\mathfrak{w}}{\mathfrak{q}+\mathfrak{w}} - \frac{2\mathfrak{q}(1+\mathfrak{w})}{(\mathfrak{q}+\mathfrak{w})^2}\right]$$
$$+ \operatorname{tg}\vartheta\left[\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{q}+\mathfrak{w}} - (1-\chi_s)\right] + \mathfrak{p}\alpha\cdot\frac{1+\mathfrak{w}-\varkappa(\mathfrak{q}+\mathfrak{w})}{(\mathfrak{q}+\mathfrak{w})^2} \tag{363}$$

und im besonderen für Gleitflug, für den

$$\sigma = 0,\quad \operatorname{tg}\vartheta = -\varepsilon,\quad \mathfrak{p} = 0 \quad \text{gilt} \tag{364}$$

$$\frac{D_{II}}{C_{II}} = \left(3 - \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{q}+\mathfrak{w}}\right)\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{P}}{\mathfrak{Y}'}\cdot\frac{1}{\alpha} + \alpha\left[\left(3-\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{q}+\mathfrak{w}}\right)\frac{\varkappa}{2} + (1-\varkappa)\frac{2\mathfrak{w}}{\mathfrak{q}+\mathfrak{w}}\right.$$
$$\left. - \frac{2\mathfrak{q}(1+\mathfrak{w})}{(\mathfrak{q}+\mathfrak{w})^2}\right]. \tag{365}$$

Sehen wir von exzentrischer Schublage ab, so beschränkt sich die Einwirkung des statischen Stabilitätsgrades $\mathfrak{q}$ auf die Dämpfung, wie man aus der Differentiation der Gl. (363) und (365) nach $\mathfrak{q}$ erkennt, im wesentlichen und ausschlaggebend auf das negative Glied

$$f(\mathfrak{q}) = \frac{2\mathfrak{q}(1+\mathfrak{w})}{(\mathfrak{q}+\mathfrak{w})^2} \tag{366}$$

im Faktor von α. Dieses nimmt, wie eben aus der Differentiation zu erkennen ist, einen größten Betrag an, wenn $\mathfrak{q} = \mathfrak{w}$ ist.

$$f(\mathfrak{q})_{\max} = \frac{1+\frac{1}{\mathfrak{w}}}{2}. \tag{367}$$

Dann wird Gl. (363) bzw. (365)

$$\left(\frac{D_{II}}{C_{II}}\right)_{\min} = (2+\chi_s)\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{P}}{\mathfrak{Y}'}\cdot\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\left[1+\chi_s\varkappa - \frac{1}{\mathfrak{w}}\right] + \operatorname{tg}\vartheta\left[\chi_s - \frac{1}{2}\right]$$
$$+ \mathfrak{p}\cdot\alpha\,\frac{1+\mathfrak{w}(1-2\varkappa)}{4\mathfrak{w}^2} \tag{368}$$

bzw.
$$\left(\frac{D_{II}}{C_{II}}\right)_{\min} = 2{,}5\,\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{P}}{\mathfrak{Y}'}\cdot\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\left[1+\frac{\varkappa}{2} - \frac{1}{\mathfrak{w}}\right]. \tag{369}$$

Da nun meist $\chi \simeq \frac{1}{2}$ gilt, verschwindet die Dämpfung im Motorflug bei zentrischer Schublage, unabhängig von der Flugrichtung gegenüber der Wagerechten, und im Gleitflug, bei demselben Anstellwinkel, nämlich wenn

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{w} = \frac{1}{5\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{P}}{\mathfrak{Y}'}\cdot\frac{1}{\alpha^2} + 1 + \frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Z}}}. \tag{370}$$

Für jeden anderen, größeren oder kleineren, positiven Betrag von $\mathfrak{q}$ und für größere Werte von $\mathfrak{w}$ ist unter diesen Voraussetzungen ($\chi = \frac{1}{2}$, $s = 0$) die Dämpfung positiv. Mit Veränderung des Wertes $\mathfrak{q}$ nimmt das

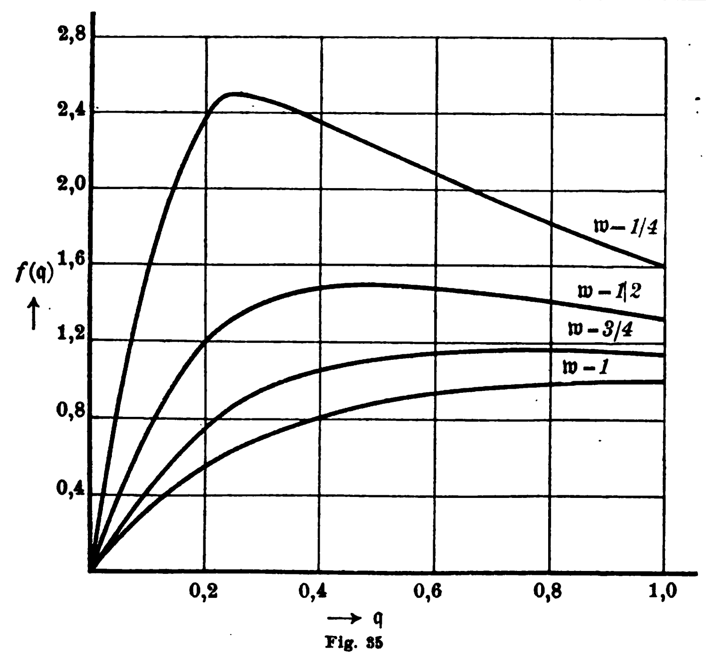


Fig. 35
zeigt die Abhängigkeit einer die dynamische Dämpfung beeinträchtigenden Größe von dem statischen Stabilisierungsmoment (Abszisse) und dem statischen Dämpfungsmoment (Parameter). Die Kurven zeigen maximale Werte für $\mathfrak{q} = \mathfrak{w}$.

gefährliche Glied $f(\mathfrak{q})$, das wir in Fig. 35 mit $\mathfrak{w}$ als Parameter über $\mathfrak{q}$ dargestellt haben, sehr schnell ab. Es verschwindet sogar zusammen mit dem statischen Stabilitätsgrad $\mathfrak{q}$, also bei „indifferentem statischen" Längsgleichgewicht. Wir erhalten dann bei zentrischer Schublage auch „dynamisch indifferentes" Längsgleichgewicht, wie aus Gl. (359) hervorgeht. In diesem Falle ($\mathfrak{q} = 0$) ergibt sich also bei geringster Leistungsbeeinträchtigung — die Steuerorgane werden, wie wir oben auseinandersetzten, so klein als überhaupt zulässig — ein Größtwert für die dynamische Dämpfung, der gemäß der Gl. (363) und (365) für Motorflug bzw. Gleitflug beträgt:

$$\left(\frac{D_{II}}{C_{II}}\right)_{\max} = (2 + \chi_s)\,\frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{P}}{\mathfrak{Y}'} \cdot \frac{1}{\alpha} + \alpha\left[2 - \frac{2 - \chi_s}{2}\,\varkappa\right] + \operatorname{tg}\vartheta \cdot \frac{\chi_s}{2} + \mathfrak{p} \cdot \alpha\,\frac{1 + \mathfrak{w}\,(1 - \varkappa)}{\mathfrak{w}^2} \tag{371}$$

bzw.

$$\left(\frac{D_{II}}{C_{II}}\right)_{\max} = 2\,\frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{P}}{\mathfrak{Y}'} \cdot \frac{1}{\alpha} + \alpha\,[2 - \varkappa]. \tag{372}$$

Da jedoch der statische Stabilitätsgrad Gl. (354) von der Luftdichte abhängig ist, ist es leider nicht möglich, ein für alle mal diesen größten

Wert zu verwirklichen. Man hat vielmehr damit zu rechnen, daß $\mathfrak{q}$ erheblichen Schwankungen ausgesetzt ist, und kann daher Vorsorge dagegen, daß die Dämpfung nie verschwindet oder gar negativ wird, nur dadurch treffen, daß man unabhängig vom Betrag $\mathfrak{q}$ ein für alle mal $\mathfrak{w}$ mindestens den aus Gl (370) folgenden Betrag gibt. Man hat also nachzuprüfen, ob die mittels der Gl. (230) bestimmte Größe des Höhensteuers überhaupt diesen Betrag des Dämpfungsmoments liefert, andernfalls ist das Höhensteuer, oder nach Gl. (315) noch wirksamer, dessen Abstand vom Schwerpunkt zu vergrößern, derart, daß für größten Anstellwinkel α Gl. (370) erfüllt wird. Trotzdem wird man natürlich bemüht sein, $\mathfrak{q}$ für alle Anstellwinkel so klein als nur möglich zu machen. Freilich muß hierbei die Grenze eingehalten werden, wie sie mit Gl. (359) für „dynamische Indifferenz im engeren Sinne" bei exzentrischer Schublage gefordert wird.

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{p}}{2}. \tag{373}$$

Kehren wir hiermit zu den Definitionen, Gl. (331) zurück, so ergibt sich

$$\frac{M_q'}{Y'} = \frac{2 + \chi_s}{2} \cdot \sigma \cdot s. \tag{374}$$

Hierin ist $\frac{M_q'}{Y'}$ nach Gl. (234) und (303) nichts anderes als der Abstand des Schwerpunkts von seiner Lage bei statischer Indifferenz, und bezeichnen wir diesen Wert für einen gegebenen Anstellwinkel mit Δd, so folgt:

$$-\Delta d = \frac{2 + \chi_s}{2} \sigma \cdot s. \tag{375}$$

Da nun, wie gesagt, $\chi_s \simeq \frac{1}{2}$ ist, läuft die Bedingung im wesentlichen darauf hinaus, daß in bezug auf die bei zentrischem Schub geforderte Schwerpunktslage das Moment des Gewichts um etwa 25% größer als das Moment des Schubes sein muß.

$$G \cdot \Delta d = -\frac{2 + \chi_s}{2} \cdot Ss. \tag{376}$$

Je höher also der Schub liegt, um so weiter darf ich den Schwerpunkt nach hinten legen, ohne die „dynamische Stabilität im engeren Sinne" beim Motorflug zu gefährden. Freilich ist hierbei das Verhalten des Flugzeugs im Gleitflug, also bei verschwindendem Moment des Schubs, im Auge zu behalten.

D. Die Bedeutung der Näherungslösungen.

Wir haben die Bedingungen, die wir im vorhergehenden Abschnitt in mathematischer Form ausgesprochen haben, nunmehr aus einer Vorstellung der durch die Näherungslösungen repräsentierten Bewegungen heraus zu erklären.

Störungen des stetigen Fluges von außen können, da die Erdbeschleunigung nach Richtung und Größe unveränderlich ist, nur dadurch zu stande kommen, daß das Flugzeug in eine Luftströmung von anderer Stärke und Richtung eintritt. Dadurch werden Anstellwinkel und Geschwindigkeit geändert. Denn gelangt das Flugzeug z. B. von der Windstille in einen schräg aufwärtssteigenden Wind, so erfordert die Wiederherstellung des bisherigen Bewegungszustandes des Flugzeugs zwecks Herstellung des bisherigen Anstellwinkels eine kleine Drehung um den Betrag, um den die Windrichtung sich geändert hat, und die Beibehaltung der bisherigen Geschwindigkeit gegenüber der Luft eine Verzögerung des Flugzeugs um den Betrag, um den die Windgeschwindigkeit gewachsen ist. Wenngleich wir immer im Auge behalten müssen, daß jede dieser Störungen für sich Schwingungen beider Art wachrufen wird, da eben diese Schwingungen durch bestimmte Eigenwerte des Flugzeuges mechanisch gekoppelt sind, scheint es doch, als ob durch die Störung des Anstellwinkels wesentlich die erste der beiden Schwingungsarten, durch die Störung der Geschwindigkeit hingegen vornehmlich die zweite wachgerufen wird. Denn zweifellos können wir die durch $\frac{D_I}{C_I}$ und $\frac{E_I}{C_I}$ bestimmte Bewegung als Drehungsschwingung ansprechen, wie sie in reiner Form ein im Windkanal um die wagerechte Schwerpunktsquerachse drehbar gelagertes Modell nach einer gewissen Auslenkung aus der Ruhelage ausführt. Denn, wenn wir entsprechend der Lagerung des Modells, in Gl. (330) $\omega = 0$ und $\tau = 0$ setzen, erhalten wir mit der Substitution (238) eine Schwingung, für die $\frac{D}{C} = \frac{Wg}{G \cdot r^2}$ und $\frac{E}{C} = \frac{M'_q \cdot g}{G \cdot r^2}$ wird.[1]) Die mit diesen Schwingungen verbundenen Anstellwinkeländerungen bringen natürlich Änderungen der Auftriebskraft mit sich, die im Fall des drehbar gelagerten Modells von der Lagerung aufgenommen werden, im freien Fluge jedoch Beschleunigungen des Flugzeugs senkrecht zur Flugbahn zur Folge haben. Hatte z. B. der Anstellwinkel gegenüber dem stetigen Flug zugenommen, so ergibt sich aus der Steigerung des Auftriebs eine Aufwärtsbewegung, die eine Richtungsänderung der Zuströmungsgeschwindigkeit der Luft gegenüber dem Flugzeug in dem Sinne bewirken, den Anstellwinkel wieder herabzusetzen. Es ist also zu erwarten, daß diese Schwingung außerordentlich schnell beigelegt wird. Tatsächlich folgt aus den Gl. (254), (257), (332) und (356) eine recht kurze Halbwertszeit

---

1) Aus Messungen der Schwingungsdauer, Gl. (256), bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten oder Zusatzträgheitsmomenten können ($-M'_q$) und W empirisch bestimmt werden. Vgl. Bestimmung der drei Konstanten einer gedämpften Schwingung durch reine Zeitmessung. H. G. Bader, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, Januar 1915.

$$B = 2 \ln 2 \cdot \frac{v}{g} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{1+\mathfrak{w}} = \frac{2 \ln 2}{g} \sqrt{\frac{G \alpha}{\mathfrak{Y}' \varrho}} \cdot \frac{1}{1+\mathfrak{w}} \tag{377}$$

in der Größenordnung von einer Sekunde, so daß innerhalb weniger Sekunden die Störung praktisch beseitigt ist. Aus den Gl. (255), (256), (332), (356) und (357) folgt die Schwingungsdauer als

$$T = 2\pi \frac{v}{g} \cdot \alpha : \sqrt{\mathfrak{q} - \left(\frac{1-\mathfrak{w}}{2}\right)^2} = \frac{4\pi}{g} \sqrt{\frac{G \cdot \alpha}{\mathfrak{Y}' \cdot \varrho}} : \sqrt{4\mathfrak{q} - (1-\mathfrak{w})^2}. \tag{378}$$

Wir haben die Grenze der Periodizität, wie sie entsprechend Gl. (258) durch das Verschwinden des Nenners in Gl. (378) bestimmt wird,

$$\mathfrak{w} = 1 - \sqrt{4\mathfrak{q}}, \tag{379}$$

in Fig. 36 zur Darstellung gebracht und erkennen daraus, daß, entsprechend den Erörterungen des vorigen Abschnitts über die Erfordernisse einer positiven Dämpfung der zweiten Schwingungsart, man sich selten weit von dieser Grenze entfernen wird. Ohne weitere Bemühungen wird also die Störung des Anstellwinkels schnellstens beseitigt.

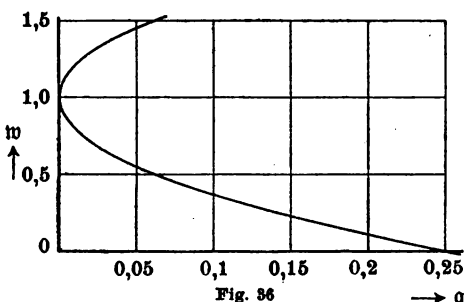


Fig. 36 zeigt für die kurze Drehungsschwingung die Grenze zwischen periodischen und aperiodischen Bewegungen in Abhängigkeit vom statischen Stabilisierungsmoment (Abszisse) und dem statischen Dämpfungsmoment (Ordinate).

Anders die Störung der Geschwindigkeit. Läßt man in den Gl. (333), (334) vorläufig die Anstellwinkeländerung δ außer acht, so folgt, da j nach Gl. (339) verschwindet, aus

$$\tau + (2\varepsilon + \chi_s \sigma + \Lambda)\,\omega = 0 \tag{380}$$

$$(\sigma - \varepsilon - \Lambda)\tau + 2\omega = 0 \tag{381}$$

$$\Lambda^2 + a\Lambda + 2 = 0 \tag{382}$$

für die periodische Änderung der Geschwindigkeit und Flugrichtung eine Dauer

$$T = 2\pi \cdot \frac{v}{g} : \sqrt{2 - \frac{a^2}{4}} \cong \sqrt{2}\,\pi \cdot \frac{v}{g} \tag{383}$$

und für die Dämpfung der Betrag

$$\frac{D}{C} = a = 3\varepsilon - (1 - \chi_s)\sigma. \tag{384}$$

Das Flugzeug wird also z. B. beim Eintritt in stärkeren Wind durch die Steigerung des Auftriebs angehoben; infolge der Trägheit aber überschreitet es die neue Gleichgewichtslage, bis die Bewegung durch die Gravitation verzögert ist. Die gesteigerte potentielle Energie der höheren Lage wird sich dann wieder in kinetische Energie umsetzen, die Ge-

schwindigkeit wird im Sinken wachsen, bis die Steigerung des Auftriebs die Bewegungsrichtung in der Lotrechten wieder umkehrt usf. Bei verschwindender Dämpfung wird sich dabei das Flugzeug gleich lange diesseits wie jenseits der Gleichgewichtslage aufhalten. Da aber die Geschwindigkeit oberhalb der Gleichgewichtslage kleiner, unterhalb derselben größer ist als die mittlere Geschwindigkeit, so legt das Flugzeug, während es sich oberhalb der Gleichgewichtslage befindet, eine geringere Strecke zurück als unterhalb derselben. Bei verschwindender Dämpfung wird also die Flugbahn im Raume durch eine Kurve (Fig. 37) dargestellt, die steilen „Berg" und flaches „Tal" besitzt. Tatsächlich verschwindet aber unter der Voraussetzung der Gl. (380), (381), daß der Anstellwinkel unveränderlich ist, die Dämpfung nicht, sondern wächst, wie aus Gl. (384) hervorgeht, vor allem mit dem Verhältnis des Widerstandes zum Auftrieb. Es ist ja auch klar, daß der Eintritt des Flugzeugs in einen Wind



Fig. 37
zeigt für eine ungedämpfte Längsschwingung die Flugbahn im Raum.

von z. B. größerer Stärke, während er die potentielle Energie des Flugzeugs durch Steigerung des Auftriebs erhöht, durch den Widerstand die kinetische Energie herabsetzt, weil eben mit der Steigerung der Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs gegenüber der Luft der Widerstand verhältnismäßig gleich stark gesteigert wird wie der Auftrieb. Es ist auch klar, daß beim weiteren Verlauf der Bewegung der Widerstand nur günstig wirkt, weil er zum Beispiel die große Geschwindigkeit des Flugzeugs im „Tal" herabsetzt und dadurch dem Flugzeug nicht erlaubt wieder einen „gleich hohen Berg zu erklettern". Im gleichen Sinne wie der Widerstand wirkt der Schub; denn die Abnahme des Vortriebes mit zunehmender Geschwindigkeit bedeutet mechanisch natürlich dasselbe wie eine Zunahme des Rücktriebes. Daher erscheint z. B. für Horizontalflug $\sigma = \varepsilon$ in Gl. (384) die entsprechende Schubkraftänderung $\chi_s \sigma$ in der Summe mit der Widerstandsänderung $2\,\varepsilon$.

Es ist nun ganz und gar nicht, wie geschehen, zulässig, die Anstellwinkeländerungen gegenüber der Flugrichtung außer acht zu lassen. Denn da das Trägheitsmoment des Flugzeugs endliche Größe besitzt, erforderte die Verwirklichung dieser Voraussetzung ein unendlich großes (rückführendes, elastisches) Moment $-M_q'$, welches die Winkelbeschleunigungen für die aus dem Sinken und Steigen des Flugzeugs resultierenden Flugrichtungsänderungen leistet. Wir haben im Gegenteil am Ende des vo-

rigen Abschnitts gesehen, daß ein verschwindendes Moment M_q' für die Steigerung von $\frac{D_{II}}{C_{II}}$, also für schnellste Beseitigung der Geschwindigkeitsstörung, günstig ist. Und zwar schien dies vor allem darauf zurückzuführen zu sein, daß in dem gefährlichen Glied $f(\mathfrak{q})$ Gl. (366) durch eine Herabsetzung des Wertes $\mathfrak{q}$ der günstige Einfluß der „statischen Dämpfung" $\mathfrak{w}$ gesteigert wird. Da das statische Dämpfungsmoment jeder Drehung des Flugzeugs um seine Querachse überhaupt widerstrebt, ist es also der dynamischen Dämpfung offenbar zuträglicher, wenn der Anstellwinkel des Flugzeugs gegenüber der Wagerechten während der Schwingung überhaupt keine Änderung erfährt, als wenn der Anstellwinkel gegenüber der Flugbahn durch das statisch stabilisierende Moment M_q' möglichst unveränderlich gehalten wird. Kehren wir zum Bild der Flugbahn (Fig. 37) zurück, so ist ja auch verständlich, daß die unveränderliche Lage gegen den Horizont bei der Talfahrt eine Vergrößerung des Anstellwinkels, beim Anstieg eine Verkleinerung desselben mit sich bringt, und somit bei der Talfahrt die vermehrten Auftriebskräfte den Abstieg ebenso verzögern, wie beim Anstieg die verminderten Auftriebskräfte das allzuweite Überschreiten der Gleichgewichtslage nach oben zu verhindern suchen. Diese außerordentlich günstige Wirkung des „statischen dämpfenden Moments" wird nun natürlich herabgesetzt, sobald beträchtlichere statische rückführende Momente M_q' auftreten. Denn diese werden z. B. beim Abstieg dem Flugzeug negative Winkelbeschleunigung erteilen, die gerade dann wesentlich der Neigung der Flugbahn gegenüber der Richtung des stetigen Fluges proportional ist, wenn das stabilisierende Moment infolge der endlichen Größe des Trägheitsmoments nicht im stande ist, sofort die unveränderliche Lage gegenüber der Flugrichtung herzustellen. Tatsächlich benötigen wir aber, wenn wir unveränderlichen, wirksamen Anstellwinkel anstreben, bei der Talfahrt eine negative Winkelbeschleunigung nur bis zum Durchschreiten der Gleichgewichtslage (Grenze zwischen Berg und Tal), während jenseits dieser Grenze beim Abstieg ins Tal bereits eine positive Winkelbeschleunigung erforderlich ist. Wir erkennen hier mechanisch deutlich den Sinn des Maximums des gefährlichen Gliedes $f(\mathfrak{q})$ Gl. (367), denn die schädliche Wirkung von $\mathfrak{q}$ sinkt wieder, sobald es einen gewissen Betrag überschreitet (siehe Fig. 35) und dann aus eigener Kraft in einem andern Sinne als $\mathfrak{w}$ die Stabilisierung leistet, indem es eben wirklich mehr und mehr bei kleinsten Anstellwinkeländerungen schon die jeweils erforderlichen Winkelbeschleunigungen leistet.

Wir haben in den Gleichungen (368), (369), (371), (372) gesehen, daß die Dämpfung in nur ganz untergeordnetem Maße von der Flugrichtung gegenüber der Wagerechten abhängt und sogar für Gleitflug und Motor-

flug im wesentlichen gleich ist. Wir sind also lediglich noch Rechenschaft schuldig über den Einfluß, den exzentrische Schublage auf die Schwingungen hat. Nehme ich, wie es positivem $\mathfrak{p}$ entspricht, an, daß der Schub unter dem Schwerpunkt angreift, so muß ich, sobald ich „Gas" gebe, das positive Moment des Schubes durch ein negatives Moment mit Hilfe des Höhensteuers ausgleichen. Das erfordert bei Kopfsteuern einen bleibenden Ruderausschlag nach oben, bei Schwanzsteuern einen Ruderausschlag nach unten. Ändert sich nun infolge einer Störung die Geschwindigkeit, so nimmt dieses negative Moment mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zu, während das positive Moment mit χ_s abnimmt. Ein Zuwachs der Geschwindigkeit hat also bei tiefliegendem Schub ein negatives Moment und damit eine Verkleinerung des Anstellwinkels zur Folge. Daß diese Wirkung, wie aus der Vergrößerung der Dämpfung durch positives $\mathfrak{p}$ in Gl. (363) geschlossen werden muß, durchaus erwünscht ist liegt auf der Hand. Denn die Abnahme des Anstellwinkels mit zunehmender Geschwindigkeit bewirkt, daß der Auftrieb im „Tal" nicht so stark zunimmt, wie bei zentrischer Schublage, infolgedessen die Rückkehr in die Gleichgewichtslage langsamer erfolgt, und die Störung schneller beseitigt wird. Man sieht nun auch leicht, welche Bedeutung $E_{II} = 0$, d. h. die „dynamische Indifferenz im engeren Sinne" hat: sie fordert, nach Gl. (375), daß bei tiefliegendem Schub der Schwerpunkt gegenüber der bei zentrischem Schub indifferenten Lage nach vorn geschoben wird und zwar in dem Maße, daß bei einer Geschwindigkeitszunahme der Auftrieb ein gleich großes, aber entgegengesetzt gerichtetes, Moment liefert als das Moment, das bei exzentrischer Schublage durch die Geschwindigkeitszunahme entsteht. Die „dynamische Indifferenz im engeren Sinne" bedeutet also eine Indifferenz des Anstellwinkels gegenüber der Geschwindigkeit, und diese Indifferenz hat eben den Erfolg, das statische Dämpfungsmoment $\mathfrak{w}$, wie oben gefordert, zu unbehinderter Geltung kommen zu lassen. Daß andrerseits hohe Lage des Schubes der Stabilisierung nachteilig ist, ist nach alledem selbstverständlich.[1]) Denn dann hat eine Steigerung der Geschwindigkeit ein positives Moment und damit eine Vergrößerung des Anstellwinkels zur Folge. Die Rückkehr zur Gleichgewichtslage erfolgt schneller, infolge dessen wird die Gleichgewichtslage

---

1) Konstruktiv läßt sie sich freilich nur selten vermeiden, denn die großen Durchmesser der Luftschrauben bedingen eine hohe Lage ihrer Achsen über dem Boden, und andrerseits fordert die Festigkeit des Fahrwerks eine möglichst tiefe Schwerpunktslage. Aus hoher Schublage folgen übrigens nicht nur für die Stabilisierung, sondern auch für die Steuerung Nachteile. Denn ohne Steuereingriff bewirkt dann Abstellen des Motors statt Übergang in den Gleitflug Aufbäumen, „Gasgeben" („Gaslandung") statt Aufrichten eine umgekehrte Flugrichtungsänderung nach unten.

weiter überschritten usf. Wir sehen, daß je stärker überhaupt die rückführenden Kräfte sind, es natürlich den dämpfenden Kräften nicht möglich ist, gegen diese aufzukommen und die Schwingung so schnell beizulegen, als es eben erwünscht erscheint. Unter diesem Gesichtspunkt können wir ohne weitere Rechnungen entscheiden, welchen Einfluß die Lage des Schubes gegenüber der Flugrichtung, gekennzeichnet durch den „Anstellwinkel" β_s des Schubes, auf die „Stabilität im im weiteren Sinne" hat. Wir haben bei der Einführung der Gleichheitsbedingungen, Gl. (296), (56), (298), in die Bewegungsgleichungen diesen Winkel β_s vernachlässigt, weil das Glied $S \cdot \sin \beta_s$, das zum Auftrieb hinzutritt, diesem gegenüber von zweiter Ordnung klein ist. In konstruktiver Hinsicht ist diese Vernachlässigung freilich unzulässig, da die Nutzlast immer nur einen Bruchteil des Gesamtgewichts ausmacht, und daher die Komponente des Schubes senkrecht zur Flugbahn der Nutzlast einen von erster Ordnung kleinen, positiven oder negativen Betrag hinzufügt. Hinsichtlich der Stabilität ist aber der Einfluß von β_s tatsächlich verschwindend geringfügig. Denn während bei einer verhältnismäßigen Geschwindigkeitszunahme ω der Auftrieb um einen Betrag $Y\,2\,\omega$ wächst, nimmt die Komponente des Schubes senkrecht zur Flugbahn um den Betrag $S \cdot \sin \beta_s \cdot \chi_s \omega$ ab, vermindert also den Auftriebszuwachs um einen Bruchteil $\sigma \cdot \beta_s \cdot \frac{\chi_s}{2}$, der höchstens 1% beträgt. Abgesehen von dieser verschwindenden Größenordnung, die natürlich erlaubt, den Einfluß zu vernachlässigen, zeigt sich, daß ein positiver Winkel β_s die Dämpfung vergrößert, weil die Änderung des Schubes mit der Geschwindigkeit dann in jedem Fall die Rückkehr in die Gleichgewichtslage verzögert.

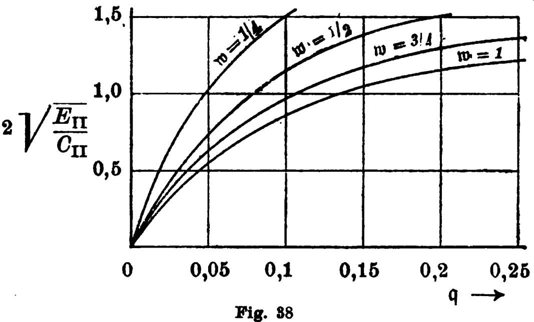


Fig. 38
zeigt, welche Werte die dynamische Dämpfung der langsamen Längsschwingungen annehmen muß, um die Grenze der Periodizität zu erreichen.

Wir haben auf S. 77 eingehend begründet, daß nicht die reine statische Indifferenz, sondern schwache Stabilität anzustreben ist, und wir haben entsprechend Gl. (258) in Fig. 38 den Wert $2\sqrt{\frac{E_{II}}{C_{II}}}$ über dem statischen Stabilisierungsmoment $\mathfrak{q}$ aufgetragen. So weit man nicht Gefahr läuft, für andere Betriebzustände das Gebiet der Stabilität überhaupt zu verlassen, ist es zweckmäßig, diejenigen Werte $\mathfrak{q}$, für die die Gleichung

$$\frac{D_{II}}{C_{II}} = 2\sqrt{\frac{E_{II}}{C_{II}}} \tag{385}$$

erfüllt wird, zu verwirklichen. Es ist leider nicht möglich, ohne weiteres auch hier, wie mit Gl. (379) und Fig. 36 für die Drehungsschwingung geschah, die Grenze der Periodizität anzugeben, da die Formel für die Dämpfung, Gl. (363) außer $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{w}$ verschiedene Größen enthält, die sich von Fall zu Fall stark ändern. Die Formel für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \frac{v}{g} : \sqrt{\frac{E_{\text{II}}}{C_{\text{II}}} - \frac{1}{4}\left(\frac{D_{\text{II}}}{C_{\text{II}}}\right)^2} \qquad (386)$$

zeigt aber im Vergleich mit Fig. 39, daß nach Verlassen der Grenze der Periodizität mit zunehmendem $\mathfrak{q}$ die Schwingungsdauer, die natürlich an

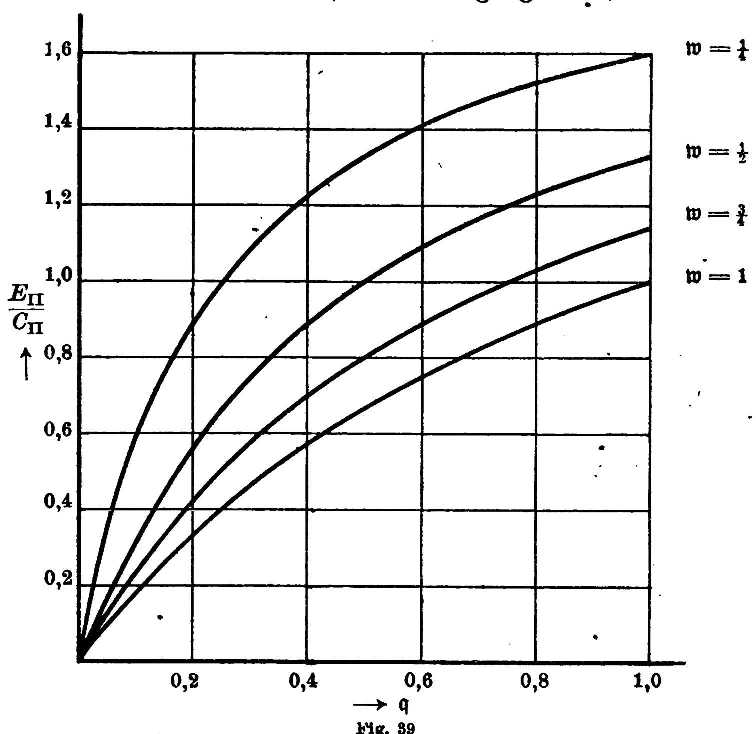


Fig. 39
zeigt für die Berechnung der Schwingungsdauer die Abhängigkeit des dynamischen Stabilisierungsmoments vom statischen.

der Periodizitätgrenze unendlich groß ist, sehr schnell abnimmt, da das rückführende Moment $\frac{E_{\text{II}}}{C_{\text{II}}}$ gegenüber der Dämpfung $\frac{D_{\text{II}}}{C_{\text{II}}}$, die selten größer als eins ist, stark zunimmt: Da sich $\frac{E_{\text{II}}}{C_{\text{II}}}$ mit wachsender statischer Stabilität asymptotisch dem Wert 2 nähert, nähert sich auch die Schwingungsdauer immer mehr dem Wert Gl. (383), wie er unter der Voraus-

setzung unendlich großer statischer Stabilität für unveränderlichen Anstellwinkel bestimmt wurde.

Wenn wir im vorhergehenden vorausgesetzt haben, daß die mit den Änderungen des Anstellwinkels verbundenen Auftriebsänderungen vollkommen gleichzeitig erfolgen, so ist das strömungstheoretisch anfechtbar. Denn es verläuft natürlich eine wenn auch nur kurze Zeit, bis eine Änderung des Anstellwinkels eine Änderung der Zirkulation um den Flügel zur Folge hat. Immerhin ist diese Zeit so kurz, daß sich eine Abweichung von unseren Voraussetzungen nur bei sehr schnellen Bewegungen geltend macht. Wie ich einer persönlichen Mitteilung von Prof. Prandtl entnehme, ist ein Einfluß dieser Art nur dann zu erwarten, wenn bei einer rein periodischen Änderung des Anstellwinkels der 2π. Teil der Wellenlänge der absoluten Bewegung von der Größenordnung der Flügeltiefe ist, d. h. bei den üblichen Eigengeschwindigkeiten, wenn die Schwingungsdauer in Sekunden von erster Ordnung klein gegenüber der Flügeltiefe in Metern ist. Das Nachhinken der ärodynamischen Erscheinungen hinter den dynamischen wird also nur gelegentlich bei der Drehungsschwingung, doch nie bei der zuletzt besprochenen Längsschwingung eine Rolle spielen.

E. Die Berechnung der Bewegungen.

Da beide Schwingungen nach dem letzten Abschnitt nach Dauer und Dekrement bekannt sind, liefert die Rückkehr zu den Bewegungsgleichungen die Beziehung zwischen den drei Veränderlichen, durch die die Bewegung gekennzeichnet wird. Wir wählen hierzu die Gl. (334) und (335) und berücksichtigen, daß j nach Gl. (339), wie auch schon für die Bestimmung der Koeffizienten geschah, außer acht bleiben darf. Dann ergibt sich

$$\delta:\tau:\omega=[(\Delta+\varepsilon-\sigma)p+2(w\Delta+\Delta^2)]:\left[-\frac{p}{\alpha}+2(q+w\Delta+\Delta^2)\right]:\left[\frac{w\cdot\Delta+\Delta^2}{\alpha}+(\Delta+\varepsilon-\sigma)(q+w\Delta+\Delta^2)\right]. \tag{387}$$

Setzen wir $x=\delta$, $y=\tau$, $z=\omega$, so folgen entsprechend den Definitionen (268) (269) die vier Integrationskonstanten aus Gl. (273), und damit die vollständigen Integrale für δ, τ und ω aus den Gl. (267), (271). Da wir annehmen, daß das Flugzeug im stetigen Fluge $\delta_0=0$ lediglich von einer anders gerichteten Luftströmung betroffen wird, vereinfachen sich mit $\tau_0=0$ die vierzeiligen Determinanten wesentlich. Mißt man die Zeit in Einheiten von $\frac{v}{g}$ Sekunden, so können nach Gl. (332) für μ und ν in Gl. (273) ohne weiteres die reellen und imaginären Bestandteile der Wurzel Δ eingeführt werden. Es wäre zwecklos, auf den Rechenvorgang

an dieser Stelle näher einzugehen, da eine ausführlichere, algebraische Darstellung außerordentlich verwickelt, die numerische Auswertung jedoch bei sinngemäßer Anwendung der Regel (285) sehr einfach ist. Tragen wir, wie in Fig. 34, in zwei Zifferblättern die Faktoren von cosinus auf der senkrechten und die von sinus auf der wagerechten Achse auf und konstruieren die resultierenden Vektoren, so zeigt sich in Abhängigkeit von den Anfangsstörungen δ_0 und ω_0 Phase und Amplitude der drei Veränderlichen für beide Bewegungen. Und wenn man unter Berücksichtigung der verschiedenen Umlaufzeit der Zeiger (Schwingungsdauer) zusammengehörige Werte über der Zeit, die in Einheiten von $\frac{v}{g}$ Sekunden gemessen wird, jeweils reduziert mit dem Dämpfungsfaktor $e^{\mu t}$ übereinander aufträgt, erhält man ein Bild der resultierenden Bewegung.

Wir haben bis jetzt angenommen, daß die Störung von außen, „durch höhere Gewalt", hervorgerufen wird. Genau so gut kann natürlich eine Änderung des Gleichgewichts vom Führer willkürlich hervorgerufen werden, dadurch, daß er die Motorleistung ändert oder einen Teil der Nutzlast abwirft oder das Höhensteuer betätigt. Dann tritt in die Bewegungsgleichungen (288) oder (289) oder (290) eine Konstante ein, die mathematisch als Störungsfunktion zu betrachten ist. Wir wollen jedoch, um die Anschaulichkeit mechanischer Vorstellungen nicht einzubüßen, nicht die in diesem Falle üblichen Methoden anwenden: wir haben uns lediglich klarzumachen, daß dieser willkürliche Eingriff zu einer neuen Gleichgewichtslage führen muß, die durch periodische oder aperiodische Bewegungen (rechnerisch nach unendlich langer, in Wirklichkeit aber genau genug schon nach mehrfacher Halbwertszeit) erreicht wird. Und diese neue Gleichgewichtslage unterscheidet sich dann von der früheren um bestimmte Beträge δ_0, τ_0, ω_0, die aus den Bewegungsgleichungen (288) bis (290) folgen, indem man dort die Beträge ΔS, ΔG, ΔM_q, um die der Führer willkürlich Schub, Gewicht und Längsmoment geändert hat, als Störungsfunktion einführt und die Ableitungen nach der Zeit gleich null setzt. Man bezieht also die Bewegung und, was für die Rechnung wesentlich ist, auch die Gleichungskonstanten überhaupt nicht auf den alten Gleichgewichtszustand, sondern von vornherein auf den neuen, und betrachtet den alten Gleichgewichtszustand als eine Störung des neuen, die nach unendlich langer Zeit verschwindet, womit auch Winkelgeschwindigkeit und Beschleunigung zu null werden. Bezeichnen wir mit

$$c_1 = \frac{\Delta S}{G} \qquad c_2 = \frac{\Delta G}{G} \qquad c_3 = \frac{\Delta M \cdot 2h}{Y \cdot r^2}, \tag{388}$$

so werden nach Gl. (333) bis (335)

$$\begin{aligned} \varkappa \cdot \delta_0 + \tau_0 \qquad\qquad & + (2\varepsilon + \chi_s \sigma)\, \omega_0 = c_1 \\ \frac{1}{\alpha}\, \delta_0 + (\sigma - \varepsilon)\, \tau_0 + \qquad & 2\omega_0 = c_2 \\ q \cdot \delta_0 \qquad\qquad & + p\omega_0 = c_3 \end{aligned} \tag{389}$$

und damit: $\delta_0 : \tau_0 : \omega_0 : 1 =$

$$\begin{vmatrix} c_1 & 1 & -2\varepsilon + \chi_s \sigma \\ c_2 & \sigma - \varepsilon & 2 \\ c_3 & 0 & p \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varkappa & c_1 & 2\varepsilon + \chi_s \sigma \\ \frac{1}{\alpha} & c_2 & 2 \\ q & c_3 & p \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varkappa & 1 & c_1 \\ \frac{1}{\alpha} & \sigma - \varepsilon & c_2 \\ q & 0 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varkappa & 1 & 2\varepsilon + \chi_s \sigma \\ \frac{1}{\alpha} & \sigma - \varepsilon & 2 \\ q & 0 & p \end{vmatrix} \tag{390}$$

Dann sind diese Beträge als Anfangsstörungen in die Determinanten (273) einzuführen, um wie oben die resultierende Bewegung zu bestimmen.

F. Die Berechnung der Höhensteuerzusatzkräfte beim Abfangen.

Unter den erzwungenen Bewegungen kommt dem „Abfangen" besondere Bedeutung zu. Denn, wie wir schon oben (S. 62) erwähnten, muß hierbei, um die erforderlichen Zentripetalkräfte durch gesteigerten Auftrieb wachzurufen, nicht allein ein großer Anstellwinkel hergestellt, sondern auch beibehalten werden und dies, obwohl die starke Krümmung der Flugbahn eine erhebliche Winkelbeschleunigung des Flugzeugs im gleichen Drehsinne erfordert. Es ist in diesem wie in anderen Fällen gar nicht nötig, daß der durch Gl. (389) aus dem früheren Gleichgewicht abgeleitete neue Gleichgewichtszustand überhaupt realisierbar ist, denn der Führer vermindert wieder den Ruderausschlag, den er, um das Flugzeug aufzurichten, gegeben hat, sobald die Flugrichtung wagerecht geworden ist, damit sich das Flugzeug nicht wieder durch den gesteigerten Auftrieb erhebt. Für Gleitflug $\sigma = 0$, $p = 0$, gibt Gl. (389), falls wir als Störungsfunktion lediglich ein Steuermoment c_3 einführen

$$\delta_0 : \tau_0 : \omega_0 : 1 = 2c_3 : \left(-2\varkappa c_3 + \frac{1}{\alpha}\, 2\varepsilon \cdot c_3\right) : \left(-\varkappa\varepsilon c_3 - \frac{1}{\alpha}\, c_3\right) : 2q \tag{391}$$

$$\delta_0 = \frac{c_3}{q} = \frac{\Delta M_q}{(-M_q')} \qquad \tau_0 = \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} - \frac{2\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Z}}\right) \delta_0 \qquad \omega_0 = -\frac{\delta_0}{2\alpha} \tag{392}$$

und hieraus folgt nach Gl. (387) aus Gl. (273) die Flugrichtungsänderung τ als Funktion der Zeit. Man kann also daraus in Abhängigkeit von

dem Steuermoment die Zeit ermitteln, die die erwünschte Flugrichtungsänderung um den Winkel ε vom Gleiten zum wagerechten Ausschweben erfordert. Diese Zeit ist jedoch keineswegs willkürlich, denn das Abfangen darf nur ein bestimmtes Gefälle in Anspruch nehmen, da der Führer erst in geringer Entfernung vom Boden das Steuer betätigt, und, bevor er nicht die geringste zum Schweben in Bodennähe erforderliche Geschwindigkeit erreicht hat, den Boden nicht berühren darf. Je später er abfängt, d. h. je geringer dieses Gefälle ist, um so größer muß die vom Höhensteuer hervorgerufene Anstellwinkeländerung sein, um durch gesteigerte Zentripetalkräfte die Flugrichtung möglichst schnell zu ändern. Das Abfanggefälle $\mathfrak{h}$ ergibt sich aus Fig. 40 in Abhängigkeit vom mittleren Krümmungsradius R der Flugbahn und dem Gleitwinkel $\operatorname{arc\,tg} \varepsilon \simeq \varepsilon$:

$$\mathfrak{h} = R\left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}}\right) \simeq R\,\frac{\varepsilon^2}{2}. \qquad (393)$$

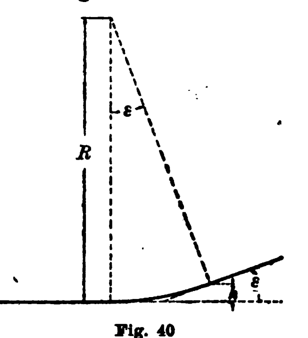


Fig. 40 zeigt für das Abfangen das Gefälle $\mathfrak{h}$ in Abhängigkeit vom Gleitwinkel ε und dem mittleren Krümmungsradius R der Flugbahn.

Das Flugzeug durchfliegt den Bogen εR der Flugbahn mit der mittleren Geschwindigkeit v, die etwa der Geschwindigkeit am Ende des Gleitflugs gleich ist, also in der Zeit:

$$t = \frac{\varepsilon R}{v} = \frac{2\mathfrak{h}}{\varepsilon v}. \qquad (394)$$

Die Gültigkeit der Gleichung kann man sich leicht vorstellen: $\varepsilon \cdot v$ ist nichts anderes als die Sinkgeschwindigkeit während des Gleitfluges, also $\varepsilon \cdot \frac{v}{2}$ die mittlere Sinkgeschwindigkeit zwischen dem Ende des Gleitfluges und dem Anfang des Ausschwebens, für das die Sinkgeschwindigkeit verschwindend klein ist. Die Abfangzeit folgt also angenähert einfach als die Abfanghöhe dividiert durch die mittlere Sinkgeschwindigkeit. Der Bewegungsvorgang des Abfangens, bei dem erhebliche Winkeländerungen, aber keine nennenswerten Geschwindigkeitsänderungen, stattfinden, wird ohne Zweifel nach Art der von uns zuerst besprochenen Schwingungen verlaufen, und wir werden kaum fehlgehen, wenn wir den Anteil der zweiten Schwingungsart an dem Bewegungsvorgang vernachlässigen.

Da kein Grund vorliegt, sich hinsichtlich der Bemessung des Dämpfungs- und Stabilisierungsmoments nennenswert von der für die Beilegung von Störungen allgemein als günstig zu bezeichnenden Grenze zwischen periodischen und aperiodischen Bewegungen zu entfernen, erhalten wir nahezu verschwindende Werte des Radikanden, Gl. (255), und wenn wir für diesen besonderen Fall Gl. (246) vereinfachen, indem wir annehmen,

daß für die kurze Zeit des Abfangens die Winkel νt klein sind, also $\cos \nu t = 1$, und $\sin \nu t = \nu t$ gesetzt werden darf, ergibt sich:

$$x = e^{\mu t}(m - n\nu t) \tag{395}$$

Und wenn wir hierin die Bedingung einführen, daß vor dem Abfangen Gleichgewicht herrschte, also das Flugzeug keine Winkelgeschwindigkeit um die Querachse hatte, so folgt daraus für Winkeländerungen nach Gl. (250) und (253) $x = x_0 \cdot e^{\mu t}(1 - \mu t)$. (396)

Nun ist:
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \cdots \tag{397}$$

Und wenn wir die in Anbetracht der kurzen Dauer des Abfangens sehr kleinen Exponenten $\mu \cdot t$ als von erster Ordnung klein gegenüber der Einheit betrachten, und dementsprechend die Reihe hinter dem dritten Glied abbrechen, folgt:

$$x \cong x_0\left(1 + \mu t + \frac{\mu^2 t^2}{2}\right)(1 - \mu t) \cong x_0\left(1 - \frac{\mu^2 t^2}{2}\right). \tag{398}$$

Setzen wir zum Beispiel $x = \delta$, so folgt die Lage δ gegenüber dem zukünftigen Gleichgewichtszustand als:

$$\delta = \delta_0 \cdot \left(1 - \frac{\mu^2 t^2}{2}\right). \tag{399}$$

Die Änderung gegenüber der alten Gleichgewichtslage ist also:

$$\delta_0 - \delta = \delta_0 \cdot \frac{\mu^2 t^2}{2}. \tag{400}$$

Der hiermit proportional gesteigerte Auftrieb hat nun eine wachsende Winkelgeschwindigkeit der Flugrichtungsänderung nach Gl. (289) zur Folge, die unter Vernachlässigung aller anderen Glieder der linken Seite zu schreiben ist mit:

$$\frac{G}{g} \cdot v \cdot \frac{d\tau}{dt} = Y'(\delta_0 - \delta) \tag{401}$$

und sich vereinfachen läßt zu:

$$d\tau = \frac{g}{v} \cdot \frac{\delta_0 - \delta}{\alpha} \cdot dt. \tag{402}$$

Führen wir hierin Gl. (400) ein, so ergibt sich für die Flugrichtungsänderung

$$\tau_0 - \tau = \frac{g}{v}\,\frac{\delta_0}{\alpha} \cdot \frac{\mu^2 \cdot t^3}{2 \cdot 3} \tag{403}$$

und da wir eine Flugrichtungsänderung von:

$$\tau_0 - \tau = \varepsilon \tag{404}$$

benötigen, wird unter Einführung der Abfangszeit nach Gl. (394)

$$\varepsilon = \frac{g}{v} \cdot \frac{\delta_0}{\alpha} \cdot \frac{\mu^2}{6} \cdot \frac{\mathfrak{h}^3 \cdot 8}{\varepsilon^3 \cdot v^3}, \tag{405}$$

nach Gl. (254), (332), (356):

$$\mu = -\frac{g}{v} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{(1+\mathfrak{w})}{2}. \tag{406}$$

Damit und mit Gl. (327) können wir Gl. (405) erheblich vereinfachen:

$$\varepsilon = \frac{g}{v} \cdot \frac{\delta_0}{\alpha} \cdot \frac{g^2}{v^2} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{(1+\mathfrak{w})^2}{4 \cdot 6} \cdot \frac{\mathfrak{h}^2 \cdot 8}{\varepsilon^2 \cdot v^3} = \frac{\delta_0}{\alpha^3} \cdot \frac{(1+\mathfrak{w})^2}{24 \cdot \varepsilon^3} \left(\frac{\mathfrak{h}}{h}\right)^3 \tag{407}$$

$$\delta_0 = 24 \cdot \frac{\varepsilon^4}{(1+\mathfrak{w})^2} \cdot \left(\frac{\alpha h}{\mathfrak{h}}\right)^3. \tag{408}$$

Erinnern wir uns nun nach Gl. (392) an die Bedeutung von

$$\delta_0 = \frac{\Delta M_q}{M_q'} = \frac{\Delta \mathfrak{M}_q}{\mathfrak{M}_q'}, \tag{409}$$

wobei durch die Schreibweise mit deutschen Buchstaben:

$$M = \varrho v^2 \mathfrak{M} \tag{410}$$

hingewiesen wird, daß der Quotient unter Ausschluß des Staudruckes gebildet werden kann, so zeigt sich, daß die dynamischen Anforderungen an das Höhensteuer um so beträchtlicher sind, je größer die statische Stabilität ist. Bezeichnen wir die Strecke, um die der Schwerpunkt zum Zwecke der Stabilisierung gegenüber seiner Lage bei indifferentem Gleichgewicht nach vorn verschoben ist, mit Δd, so ist nach Gl. (234) und (303):

$$-M_q' = \varrho v^2 \mathfrak{Y}' \cdot \Delta d \tag{411}$$

$$-\mathfrak{M}_q' = \mathfrak{Y}' \Delta d. \tag{412}$$

Ist mit der Steuergröße $\Delta \mathfrak{M}_q \simeq \Sigma \Delta \eta_F \cdot F_F \cdot d_F$ (413)

bereits bekannt, wobei $\Delta \eta$ den mit größtem Steuerausschlag erreichbaren Zuwachs der Auftriebszahl bedeutet, so kann aus (408) und:

$$\delta_0 = \frac{\Sigma \Delta \eta_F \cdot F_F \cdot d_F}{\mathfrak{Y}' \cdot \Delta d} \tag{414}$$

geschlossen werden, bis zu welcher Grenze die statische Stabilität des Flugzeugs, die mit Grad und Art seiner Belastung ja veränderlich ist, gesteigert werden darf, ohne das Abfangen bei ungewöhnlich ungünstigen Umständen unmöglich zu machen.

Bei alledem ist vorauszusetzen, daß der Gl. (400) entsprechende Größtwert der Anstellwinkelzunahme

$$(\delta_0 - \delta) = \delta_0 \cdot \frac{(1+\mathfrak{w})^2}{8 \cdot \varepsilon^3} \cdot \left(\frac{\mathfrak{h}}{\alpha h}\right)^2 \tag{415}$$

nicht über den Bereich der linearen Auftriebsänderung hinausführt.

VII. Die Berechnung der Querbewegungen.

A. Die Bewegungsgleichungen.

Die Voraussetzung vollkommener seitlicher Symmetrie hat es ermöglicht, die sechs Freiheitsgrade der Bewegung eines Flugzeugs, in zwei Gruppen zu je dreien gesondert, zu behandeln. Es bleibt nun zu erörtern, welcher Art die Bewegungen sind, die der zweiten Gruppe entsprechen, d. h. den Freiheitsgraden einer Ebene (Symmetrieebene) im Raume: Verschiebung der Symmetrieebene senkrecht zu sich selbst und Drehungen um zwei in ihr liegende Achsen. Wir wählen als Schwerpunktsachsen in der Symmetrieebene die Flugrichtung und ihre Normale und nennen die erstere „Längsachse“ und die zweite „Lotachse“. Da die Massen des Flugzeugs diesen Achsen immer sehr nahe liegen, können wir das Fliehkraftmoment vernachlässigen und die beiden gewählten Achsen als „freie“ Achsen betrachten. Bezeichnen wir Trägheitsradius und Momente um die Längsachse mit Zeiger l und die Lotachse mit Zeiger s (senkrecht), Drehungen um die Längsachse mit Winkel φ, um die Lotachse mit ψ, die Winkelgeschwindigkeit der Kursänderung mit ζ und mit Z die Summe der Luftkräfte senkrecht zur Symmetrieebene, so erhalten wir die folgenden Bewegungsgleichungen:

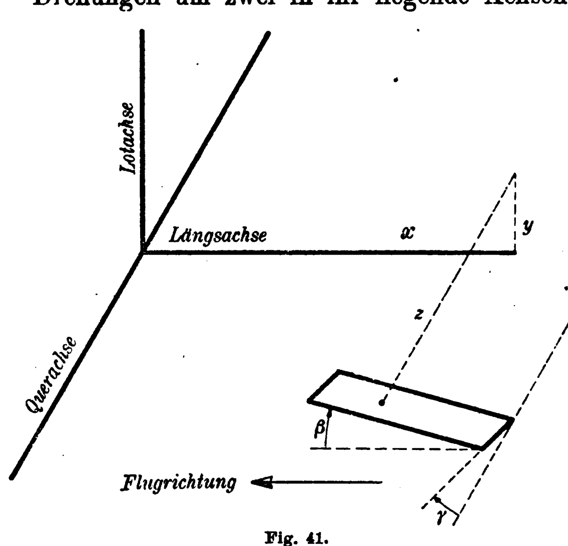


Fig. 41.
Ordinaten und Winkel eines unendlich schmalen Elements einer V-förmigen Tragfläche gegenüber dem Schwerpunktsachsensystem.

$$\frac{G}{g} \cdot r_l^2 \cdot \ddot{\varphi} = M_l, \tag{416}$$

$$\frac{G}{g} \cdot r_s^2 \cdot (\ddot{\psi} + \dot{\zeta}) = M_s, \tag{417}$$

$$\frac{G}{g} \cdot v \cdot \dot{\zeta} = G \cdot \varphi + Z. \tag{418}$$

Die Momente M_l und M_s wirken darnach im Sinne der Winkel φ und ψ, und der Winkel der Wendung ζ wird im gleichen Sinne wie der Winkel der Drehung ψ gemessen. Nehmen wir z. B. an, daß φ bzw. ψ positiv sei für eine Drehung um die Längsachse bzw. Lotachse im Uhrzeigersinn,

gesehen von hinten bzw. oben, so ist φ positiv bei einer Schräglage („Hängen") nach rechts, ψ bei einer Drehung und ζ bei einer Wendung nach rechts; und die Luftkraft Z positiv, wenn sie das Flugzeug nach rechts zu „verschieben" sucht.

B. Die Berechnung der Gleichungskonstanten.

M_l, M_s und Z sind Funktionen der Winkel φ, ψ und der Winkelgeschwindigkeiten $\dot\varphi$, $\dot\psi$ und $\dot\zeta$. Um diese Abhängigkeit festzustellen, bebetrachten wir nach Fig. 41 ein unendlich kleines Flächenelement einer Tragfläche bzw. Flosse. Die Breite sei db, die Tiefe t. Der Druckpunkt, für den also das Moment der Luftkräfte verschwindet (vgl. Anm. 1, S. 56), habe die Koordinaten x, y, z in bezug auf den Schwerpunkt als Ursprung, und Längs-, Lot- und Querachse als Achsen. Der Druckpunkt liegt also x m hinter, y m über, z m seitlich (links) vom Schwerpunkt. In der Figur ist außerdem angedeutet, daß das Flächenelement gegenüber der Flugrichtung (Längsachse) unter dem Winkel β angestellt ist und mit seiner Vorderkante gegenüber der Wagerechten unter Winkel γ liegt. Infolge seines Widerstandes und Auftriebs äußert dieses Flächenelement um die Längsachse ein Moment

$$d M_l = \varrho \cdot v^2 . db \cdot t \cdot \eta (y \ \sin \gamma + z \cdot \cos \gamma) \tag{419}$$

um die Lotachse ein Moment

$$- d M_s = \varrho \cdot v^2 \cdot db \cdot t \cdot [\xi (x \cdot \psi + z) + \eta (\sin \gamma \cdot x)] \tag{420}$$

und senkrecht zur Symmetriebene eine Kraft

$$dZ = \varrho \cdot v^2 \cdot db \cdot t \cdot \eta \sin \gamma . \tag{421}$$

Da nun die Widerstandszahl ξ und die Auftriebszahl η Funktionen des Anstellwinkels sind, haben wir die Abhängigkeit des Anstellwinkels von den oben angegebenen Winkeln und Winkelgeschwindigkeiten anzugeben. Für kleinere Winkel und Winkelgeschwindigkeiten ergibt sich:

$$\varDelta \beta = - \frac{\dot\varphi}{v} (y \cdot \sin \gamma + z \cdot \cos \gamma) + \sin \gamma \left(\psi + \frac{\dot\psi + \dot\zeta}{v} \cdot x \right) \tag{422}$$

Doch nicht allein der Anstellwinkel, sondern auch die Geschwindigkeit ist als veränderlich zu betrachten, denn bei einer Drehung des Flugzeugs um die Lotachse, wie sie z. B. beim Wenden stattfindet, ist die Geschwindigkeit außen liegender Teile größer als die innenliegender. Daraus ergibt sich:

$$\mathfrak{v} = v + (\dot\psi + \dot\zeta) z . \tag{423}$$

Wenn wir von höherer Ordnung kleine Glieder vernachlässigen, sind:

$$\text{(424)} \qquad \mathfrak{\xi} = \xi + \xi' \varDelta \beta, \qquad \mathfrak{\eta} = \eta + \eta' \cdot \varDelta \beta, \qquad \text{(425)}$$

$$v'^2 = v^2\left(1 + 2z\,\frac{\dot\psi + \dot\zeta}{v}\right). \tag{426}$$

Für die Integration haben wir zwei grundsätzlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, die von vornherein gestatten, in voneinander abweichenden Richtungen Vernachlässigungen vorzunehmen: Tragflächen und senkrechte Hilfsflächen.

Für die Tragflächen sind die Druckpunktsordinaten x und y überwiegend klein gegenüber z, und Winkel γ ist ein kleiner Winkel, für den ohne weiteres $\sin\gamma \cong \gamma$ und $\cos\gamma = 1$ gesetzt werden kann. Danach vereinfachen sich die Differentiale (419) bis (421) für Tragflächen zu

$$dM_l = \varrho\cdot v'^2\cdot\eta\cdot t\cdot z\,dz \tag{427}$$

$$-dM_s = \varrho\cdot v'^2\cdot\xi\cdot t\cdot z\,dz \tag{428}$$

$$dZ = \varrho\cdot v'^2\cdot\eta\gamma\cdot t\cdot dz \tag{429}$$

$$\Delta\beta = \gamma\cdot\psi - \frac{\dot\varphi}{v}\cdot z. \tag{430}$$

Mit den Gleichungen (424) bis (426) erhalten wir also schließlich

$$dM_l = \varrho\cdot v^2\left[\eta z + \psi\eta'\gamma\cdot z + \frac{\dot\psi+\dot\zeta}{v}\cdot 2\eta z^2 - \frac{\dot\varphi}{v}\,\eta' z^2\right]t\cdot dz \tag{431}$$

$$-dM_s = \varrho\cdot v^2\left[\xi z + \psi\xi'\gamma\cdot z + \frac{\dot\psi+\dot\zeta}{v}\,.\,2\xi z^2 - \frac{\dot\varphi}{v}\,\xi' z^2\right]t\cdot dz \tag{432}$$

$$dZ = \varrho\cdot v^2\left[\eta\gamma + \psi\,\eta'\gamma^2 + \frac{\dot\psi+\dot\zeta}{v}\cdot 2\eta\gamma z - \frac{\dot\varphi}{v}\eta'\gamma z\right]t\cdot dz. \tag{433}$$

Nehmen wir, wie oben S. 68 an, daß die Flügeltiefen und mit dem Anstellwinkel nicht nur die Auftriebszahlen, sondern auch die Rücktriebszahlen linear nach außen abnehmen, so erhalten wir bei der Integration über eine Flügelhälfte Integrale von der Form:

$$\int_0^{\frac{b}{2}}\left(\eta + \vartheta - 2\vartheta\,\frac{2z}{b}\right)\left(t + u - 2u\,\frac{2z}{b}\right)(\mathfrak{A}z^2 + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C})\,dz$$

$$= \frac{\mathfrak{A}}{30}\cdot\frac{b^3}{8}(10\eta t - 5\vartheta t - 5\eta u + 4\vartheta u) + \frac{\mathfrak{B}}{6}\cdot\frac{b^2}{4}(3\eta t - \vartheta t - \eta u + \vartheta u) + \frac{\mathfrak{C}}{3}\cdot\frac{b}{2}(3\eta t + \vartheta u). \tag{434}$$

Da bei der Integration über die andere Flügelhälfte das Maß der V-Form γ wegen der Symmetrie gleichzeitig mit z das Vorzeichen wechselt, hängt es ganz davon ab, in welcher Potenz jeweils $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ den Faktor γ enthalten, ob das Integral für den ganzen Flügel verschwindet oder den doppelten durch Gl. (434) angegebenen Wert erreicht; denn sobald die Summe der Exponenten von γ und z eine gerade Zahl ist, ist der Wert des unbestimmten Integrals unabhängig von dem Vorzeichen von z. Das bestimmte Integral verschwindet also für gleich große absolute Werte

der oberen und unteren Grenze, wie sie die Symmetrie fordert. Ist aber der Exponent ungerade, so wechselt das unbestimmte Integral gleichzeitig mit z das Vorzeichen, und das bestimmte Integral erreicht für absolut genommen gleichgroße Werte einer positiven oberen und einer negativen unteren Grenze den doppelten Betrag als zwischen Null und einer der Grenzen. Aus den Gl. (431) bis (433), verschwinden also bei der Integration die ersten Glieder der Klammern, die die Momente und Kräfte während des stetigen Fluges liefern, und zeigen damit an, daß eben aus Gründen der Symmetrie Gleichgewicht zwischen der rechten und linken Flügelhälfte besteht. Hingegen ist für alle Glieder, die die Störungen ψ, $\dot{\psi}$, ζ, $\dot{\varphi}$ als Faktor enthalten, die Summe der Exponenten von y und z gleich drei und somit betragen die von den Störungen wachgerufenen Zusatzkräfte für den ganzen Flügel doppelt so viel als für eine Flügelhälfte. Für senkrechte Hilfsflächen, die wir weiterhin „Kielflossen“ nennen wollen, weil sie wesentlich parallel der Symmetrieebene und damit der Kiellinie stehen, ist $\gamma = \frac{\pi}{2}$ und daher $\sin\gamma = 1$ und $\cos\gamma = 0$. Außerdem können für Kielflossen infolge ihrer geringen Ausdehnung die Werte x, y, z direkt als Mittelwerte ihrer Druckpunktkoordinaten angesprochen und rechnerisch behandelt werden. Danach vereinfachen sich die Teilbeträge für eine Flosse nach Gl. (419) bis (422) zu:

$$M_l = \varrho\, v^2 \cdot bt\,\eta y \tag{435}$$

$$-M_s = \varrho\, v^2 \cdot bt[\xi(x\psi + z) + \eta x] \tag{436}$$

$$Z = \varrho\, v^2 \cdot bt\eta \tag{437}$$

$$\Delta\beta = \psi + \frac{\dot{\psi} + \dot{\zeta}}{v} \cdot x - \frac{\dot{\varphi}}{v} \cdot y. \tag{438}$$

Und mit $b \cdot t = f$ erhalten wir nach Gl. (424) bis (426):

$$M_l = \varrho v^2 f\left[\eta y + \psi\eta' y + \frac{\dot{\psi} + \dot{\zeta}}{v} \cdot (2\eta y z + \eta' x y) - \frac{\dot{\varphi}}{v} \cdot \eta' y^2\right] \tag{439}$$

$$\begin{aligned} -M_s = \varrho v^2 f\Big[&\xi z + \eta x + \psi(\xi x + \xi' z + \eta' x) + \frac{\dot{\psi} + \dot{\zeta}}{v} \\ &(2\xi z^2 + 2\eta x z + \xi' x z + \eta' x^2) - \frac{\dot{\varphi}}{v} \cdot y(\xi' z + \eta' x)\Big] \end{aligned} \tag{440}$$

$$Z = \varrho v^2 f\left[\eta + \psi \cdot \eta' + \frac{\dot{\psi} + \dot{\zeta}}{v} \cdot \eta' x - \frac{\dot{\varphi}}{v} \cdot \eta' y\right]. \tag{441}$$

Wie bei den Tragflächen gilt auch für die Kielflossen, daß aus Gründen der Symmetrie Glieder, die die Ordinate z oder die „Auftriebszahl“ η linear enthalten, verschwinden. Denn wenn es sich um Flossen handelt, die in der Symmetrieebene selbst liegen, so verschwindet z, und da der Anstellwinkel null ist, auch η. Handelt es sich jedoch um zwei Flossen,

so haben die z bzw. η entgegengesetzte Vorzeichen, und die Addition der beiden Werte liefert null. Kommt jedoch z in der zweiten Potenz vor oder im Produkt mit η, so wird dieser Wert in jedem Fall positiv, gleichgültig, ob es sich um die rechts- oder linksliegende Flossen handelt. Dabei gilt, wie der Definition von γ entspricht, η positiv, wenn es von der Flosse aus auf die Symmetrieebene zu gerichtet ist, also die „Normalkräfte“ die beiden Flossen gegeneinander drücken.

Wir definieren nun Momente und Kräfte getrennt nach den Veränderlichen der Bewegung mit:

$$\frac{M_l}{G \cdot r_l^2} = p = \psi p_1 + \frac{\dot\psi + \dot\zeta}{v} \cdot p_2 - \frac{\dot\varphi}{v} \cdot p_3 \tag{442}$$

$$-\frac{M_s}{G \cdot r_s^2} = q = \psi q_1 + \frac{\dot\psi + \dot\zeta}{v} \cdot q_2 - \frac{\dot\varphi}{v} \cdot q_3 \tag{443}$$

$$\frac{Z}{G} = k = \psi \cdot k_1 + \frac{\dot\psi + \dot\zeta}{v} \cdot k_2 - \frac{\dot\varphi}{v} \cdot k_3 . \tag{444}$$

Fassen wir demgemäß die Integrale über alle Tragflächen und die entsprechenden Werte für alle Kielflossen als Summen zusammen, so ergeben sich nach den Gl. (431) bis (433) und (439) bis (441), wenn wir mit F den Inhalt der Tragflächen und mit f den Inhalt der Kielflossen bezeichnen, mit Einführung der Gleichgewichtsbedingung, Gl. (56), folgende Beträge:

$$p_1 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} \cdot r_l^2}\left[F\eta'\gamma \frac{b}{12}\left(3 - \frac{u}{t}\right) + f\eta' y\right] \tag{445}$$

$$q_1 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} \cdot r_s^2}\left[F\xi'\gamma \frac{b}{12}\left(3 - \frac{u}{t}\right) + f(\xi' z + \eta' x + \xi x)\right] \tag{446}$$

$$k_1 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y}}\left[F\eta'\gamma^2 + f\eta'\right] + \sigma \tag{447}$$

$$p_2 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} r_l^2}\left[F\frac{b^2}{60}\left(1 - \frac{t}{b}\right)10\eta - 5\vartheta - 5\eta\frac{u}{t} + 4\vartheta\frac{u}{t} + fy(2\eta z + \eta' x)\right] \tag{448}$$

$$q_2 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} r_s^2}\left[F\frac{b^2}{60}1{,}08\left(10\xi - 5\vartheta\frac{\xi}{\eta} - 5\xi\frac{u}{t} + 4\vartheta\cdot\frac{\xi}{\eta}\cdot\frac{u}{t}\right) + f(xz[2\eta + \xi'] + 2\xi z^2 + \eta' x^2)\right] \tag{449}$$

$$k_2 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y}}\left[F\frac{b}{6}\gamma\left(3\eta - \vartheta - \eta\frac{u}{t} + \vartheta\frac{u}{t}\right) + f\eta' x\right] \tag{450}$$

$$p_3 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} r_l^2}\left[F\frac{b^2}{24}\eta' \cdot \left(2 - \frac{u}{t}\right) + f\eta' y^2\right] \tag{451}$$

$$q_3 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} r_s^2}\left[F\frac{b^2}{24} \cdot \xi' \left(2 - \frac{u}{t}\right) + fy(\xi' z + \eta' x)\right] \tag{452}$$

$$k_3 = -\frac{\Sigma}{\mathfrak{Y}}\left[F \cdot \frac{b}{12}\eta'\gamma\left(3 - \frac{u}{t}\right) + f\eta' y\right] \cdot \tag{453}$$

In q_1, Gl. (446) sind neben den dort angeführten Momenten der Flügel und Flossen, die labilisierenden Momente einzuführen, die Rümpfe und Boote bei geringen Schrägstellungen ausüben.

In q_2, Gl. (449), haben wir durch den Faktor 1,08 berücksichtigt, daß der Widerstand nicht, wie die Integration voraussetzt, gleichmäßig über die ganze Spannweite verteilt ist, sondern wie Figur 4 zeigt, am Rande in einer Breite von etwa $\frac{1}{50}$ der Spannweite den doppelten Betrag erreicht, als bei wesentlich gleichförmiger Verteilung dem inneren Teil des Flügels zukommt.

So ist auch bei genaueren Berechnungen des Moments p_2 zu berücksichtigen, daß der Auftrieb am Rande stark abnimmt. Der ersten Näherung, Fig. 3, entspricht eine Abnahme des Moments um einen Bruchteil $\frac{t}{b}$, wie wir sie in Gl. (448) durch den Faktor $\left(1-\frac{t}{b}\right)$ zum Ausdruck gebracht haben.

Unter den wagerechten Kräften k_1, die senkrecht zur augenblicklichen Flugrichtung wirken, haben wir die Komponente des Schubs mit aufgenommen, die eine Auslenkung ψ der Symmetrieebene aus der Flugrichtung zur Folge hat, und die bei kleinen Winkeln ψ diesen direkt proportional ist $\frac{S}{G} \cdot \psi = \sigma \cdot \psi$.

Um einen Überblick über die Größenordnung der durch Gl. (445) bis (453) dargestellten Werte zu erhalten, vernachlässigen wir für eine oberflächliche Abschätzung die Veränderlichkeit von Anstellwinkel ($\vartheta = 0$) und Flügeltiefe ($u = 0$) für die Tragflächen, die stets kleine Ordinate y für die Kielflossen ($y = 0$) und die Ableitung der Rücktriebszahl nach dem Anstellwinkel für Tragflächen und Kielflossen ($\xi' = 0$) und erhalten dann:

$$p_1 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} r_1^2} F \cdot \eta' \gamma \frac{b}{4} \quad (454) \qquad q_1 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} r_2^2} f \eta' x \quad (455)$$

$$k_1 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y}} f \eta' + \sigma \quad (456)$$

$$p_2 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} r_1^2} F \frac{b^2}{6} \cdot \eta \left(1 - \frac{t}{b}\right) \quad (457) \qquad q_2 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} r_2^2} F \frac{b^2}{6} . 1{,}08 \xi + f x (2 \eta z + \eta' x) \quad (458)$$

$$k_2 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y}} F \frac{b}{2} \gamma \eta + f \eta' x \quad (459)$$

$$p_3 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y} r_1^2} F \frac{b^2}{12} \cdot \eta' \quad (460) \qquad q_3 = 0 \quad (461)$$

$$k_3 = \frac{\Sigma}{\mathfrak{Y}} F \frac{b}{4} \eta' \gamma . \quad (462)$$

C. Die Bestimmung von Näherungslösungen.

Nunmehr können wir zu den Bewegungsleichungen zurückkehren, um daraus Aufschluß zu erhalten, welcher Art die seitlichen Bewegungen sind, deren das Flugzeug fähig ist. Wir führen also in Gl. (416) bis (418) die Definitionen Gl. (442) bis (444) ein:

$$\frac{\ddot{\varphi}}{g} = p_1 \cdot \psi + p_2 \frac{\dot{\psi} + \dot{\zeta}}{v} - p_3 \frac{\dot{\varphi}}{v} \tag{463}$$

$$-\frac{\ddot{\psi} + \ddot{\zeta}}{g} = q_1 \cdot \psi + q_2 \frac{\dot{\psi} + \dot{\zeta}}{v} - q_3 \frac{\dot{\varphi}}{v} \tag{464}$$

$$\frac{v}{g} \cdot \dot{\zeta} = \varphi + k_1 \cdot \psi + k_2 \frac{\dot{\psi} + \dot{\zeta}}{v} - k_3 \frac{\dot{\varphi}}{v}. \tag{465}$$

Setzen wir nun wie oben (S. 88) die Störungen proportional $e^{\lambda t}$, so folgen:

$$\dot{\varphi} = \lambda\varphi \quad \ddot{\varphi} = \lambda^2\varphi \quad \dot{\psi} = \lambda\psi \quad \ddot{\psi} = \lambda^2\psi \quad \dot{\zeta} = \lambda \cdot \zeta \quad \ddot{\zeta} = \lambda^2\zeta \tag{466}$$

oder mit den Gl. (327) und (332)

$$\Delta^2\varphi = 2hp_1\psi + p_2\Delta(\psi + \zeta) - p_3\Delta\varphi \tag{467}$$

$$-\Delta^2(\psi + \zeta) = 2hq_1\psi + q_2\Delta(\psi + \zeta) - q_3\Delta\varphi \tag{468}$$

$$-\Delta\zeta = -\varphi + k_1\psi + \frac{k_2}{2h}\Delta(\psi + \zeta) - \frac{k_3}{2h}\Delta\varphi. \tag{469}$$

Genau wie oben Gl. (339) läßt sich auch hier der Nachweis führen, daß die Änderung der Luftkräfte normal zur Symmetrieebene durch die Winkelgeschwindigkeit verschwindend geringfügig ist. Wir können also die Quotienten k_2 und k_3, da sie durch den Nenner $2h$ außerordentlich stark reduziert werden, von vornherein außer acht lassen. Die Bedingung, daß die drei Bewegungsgleichungen mit den drei Variablen ζ, φ, ψ nebeneinander bestehen, können wir wieder in der Form schreiben, daß die Determinante der Koeffizienten verschwinden muß:

$$\begin{vmatrix} p_2 & \Delta^2 + p_3\Delta & p_2\Delta + 2hp_1 \\ \Delta + q_2 & q_3\Delta & \Delta^2 + q_2\Delta + 2hq_1 \\ 1 & 1 & k_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{470}$$

Da, wie wir oben (S. 74) ausführlich auseinander gesetzt haben, und wie auch in der Bewegungsgleichung (418) zum Ausdruck kommt, nicht der Kurs ζ, sondern nur die Winkelgeschwindigkeit seiner Änderung $\Delta\zeta$ als Variable auftritt, konnten wir aus der ersten Kolonne der Determinante den gemeinsamen Faktor Δ herausdividieren und erhalten so wie oben Gl. (337) eine Gleichung vierten Grades für Δ und für deren Koeffizienten die Werte

$$\mathfrak{K}_1 = q_2 + p_3 + k_1 \tag{471}$$

$$\mathfrak{K}_2 = 2hq_1 + q_2p_3 + k_1p_3 + k_1q_2 - p_2q_3 \tag{472}$$

$$\mathfrak{K}_3 = 2hq_1p_3 - 2hp_1q_3 + 2hp_1 + k_1p_3q_2 - k_1p_2q_3 \tag{473}$$

$$\mathfrak{K}_4 = -2hq_1p_2 + 2hp_1q_2 = 2hq_1\left(\frac{q_2}{q_1}\cdot p_1 - p_2\right). \tag{474}$$

Wir haben nun wieder die Aufgabe, aus dem Vergleich dieser Koeffizienten mit ihrer notwendigen Form, Gl. (275) bis (278) plausible Näherungswerte für die $\frac{D}{C}$ und $\frac{E}{C}$ zu suchen. Lassen wir die nach den Gl. (456) und (461) geringfügigen k_1 und q_3 vorläufig außer acht, so bestimmt der Koeffizient $\mathfrak{K}_1$ eindeutig die Dämpfungen zu q_2 und p_3; dementsprechend enthält auch der Koeffizient $\mathfrak{K}_2$ deren Produkt. Als elastisches Moment scheint man nach $\mathfrak{K}_2$ für die erste Schwingung $2hq_1$ ansprechen zu müssen, das tatsächlich auch im Produkt mit p_3 wie erforderlich im Koeffizienten $\mathfrak{K}_3$ erscheint. Schließlich enthält sogar der Koeffizient $\mathfrak{K}_4$ diesen Wert, wenn man nur die zweite in Gl. (474) angegebene Schreibweise anwendet. Zweifel bestehen nun lediglich noch hinsichtlich der Größe des elastischen Moments für die zweite Art der Bewegung. Denn mit $k_1 \cong 0$, $q_3 \cong 0$ ist ein solches Moment nach Aussage des Koeffizienten $\mathfrak{K}_2$ überhaupt nicht vorhanden; nach $\mathfrak{K}_3$ müßte es betragen: $2h\,\frac{p_1}{q_2}$ und nach $\mathfrak{K}_4$: $\left(\frac{q_2}{q_1}\,p_1 - p_2\right)$. Wir müssen uns hier wieder wie oben S. 90 an diesen letzten Wert für $\frac{E_{II}}{C_{II}}$ halten, da er als Faktor auftritt, während er in den Koeffizienten $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ nur als Summand erscheint, von dem wir annehmen dürfen, daß er von untergeordneter Bedeutung ist. Danach erhalten wir als Näherungslösungen:

$$\frac{D_I}{C_I} = q_2 \quad (475) \qquad \frac{E_I}{C_I} = 2hq_1 \quad (476)$$

$$\frac{D_{II}}{C_{II}} = p_3 \quad (477) \qquad \frac{E_{II}}{C_{II}} = \frac{q_2}{q_1}\cdot p_1 - p_2. \quad (478)$$

D. Die Bedeutung der Näherungslösungen.

Welche Bedeutung der ersten Art der Bewegung Gl. (475) und (476) zuzusprechen ist, ist leicht zu sehen, da die Determinante, Gl. (470) in der Mitte der letzten Kolonne die entsprechende Schwingungsgleichung bereits explizit enthält. Es handelt sich um eine periodische Änderung des Winkels ψ, die bestimmt wird durch den Widerstand, den das Flugzeug einer Drehung um die Lotachse entgegensetzt und durch das Richtmoment, das die Flossen zur Einstellung der Symmetrieebene in

die Flugrichtung liefern. Die Bewegung verläuft also genau so, als ob das Flugzeug in der Art einer Windfahne um seine Lotachse drehbar gelagert wäre und so einem Wind von der Stärke der Flugzeuggeschwindigkeit ausgesetzt würde. Man hat sich vorzustellen, daß diese Drehung um die Lotachse mit so geringer Schwingungsdauer stattfindet, daß sie Drehungen um die Längsachse infolge der sehr starken Dämpfung in dieser Richtung nicht zur Folge haben kann.

Auch hier scheint es wieder durchaus analog unseren Betrachtungen der Längsstabilität zweckmäßig, das Richtmoment q_1 nicht über ein gewisses Maß zu steigern, damit es durch die starken Winkelbeschleunigungen das Flugzeug nicht immer wieder über die Gleichgewichtslage hinaustreibt, wodurch eine unangenehme Unstetigkeit betreffs der Einhaltung des gewünschten Kurses in Erscheinung tritt. Man wird daher genau wie oben den durch Gl. (258) gegebenen Grenzwert möglichst anstreben, bei dem das Richtmoment q_1 in bestimmter Beziehung zum Dämpfungsmoment q_2 tritt, derart, daß es gerade stark genug ist, entgegen diesem Dämpfungsmoment das Flugzeug in die gewünschte Kurslage zurückzuführen, doch nur so langsam, daß es eben diese Gleichgewichtslage nicht wieder überschreitet. Dieser Forderung kann man leicht nachkommen. Auf das Richtmoment q_1 hat man Einfluß durch die Dimensionierung der Flossen und ihre Tiefenlage. Diese Maße haben natürlich auch Einfluß auf das Dämpfungsmoment q_2; daneben gibt es jedoch noch ein Mittel, das lediglich q_2 und keine der andern Konstanten beeinflußt. Es handelt sich um das Glied $2\eta f x z$ in Gl. (458). Gibt man einem Flossenpaar ($z \neq 0$) Anstellwinkel und Wölbung derart, daß die Normalkräfte die Flossen gegeneinander pressen, so wird dieses Glied positiv, d. h., die Dämpfung wird vergrößert.[1]) Denn die Winkelgeschwindigkeit um die Lotachse, wie sie z. B. bei einer kleinen Rechtsdrehung eintritt, hat für die linke Flosse eine Steigerung, für die rechte Flosse eine Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit zur Folge; dementsprechend nimmt links die auf die Symmetrieebene zu gerichtete Normalkraft zu und übt mit ihrem Hebelarm x in bezug auf den Schwerpunkt ein Moment, das dieser Winkelgeschwindigkeit entgegengerichtet ist. Einen Beitrag gleicher Größe und gleicher Richtung liefert hierzu die rechte Flosse durch das Sinken ihrer Normalkraft. Umgekehrt kann man natürlich dadurch, daß man die Flossen so anordnet, daß sie auseinander gepreßt werden, zur Erhöhung der Wendigkeit das Dämpfungsmoment q_2 beliebig stark herabsetzen, verschwinden oder gar negativ werden lassen.

---

1) Den Schutzanspruch auf derartige Anordnungen hat Verfasser der Luftverkehrsgesellschaft L. V. G. (Berlin) übergeben.

Dies ist um so bedeutsamer, als das Moment q_2 (genau wie bei der Längsstabilität das Dämpfungsmoment w) auch für die zweite Art der Bewegungen eine ausschlaggebende Rolle spielt, die um so mehr beeinträchtigt wird, je größer (analog dem statischen Stabilisierungsmoment q bei der Längsstabilität) das stabilisierende Moment q_1 der kurzen Drehungsschwingung ist. Ja, man könnte nach Gl. (478) sogar versucht sein, zwei der Größen des ersten Gliedes negative Beträge zu geben, da dies konstruktiv durchaus möglich und für die Wendigkeit vorteilhaft wäre. Aber die Gl. (475), (476) zeigen, daß damit mindestens eine der Stabilitätsbedingungen der Drehungsschwingung verletzt würde. Wir sehen aus Gl. (437), daß p_2 notwendig positiv und groß ist, und daß man es nach Gl. (448) lediglich dadurch herabsetzen kann, daß man den Anstellwinkel oder die Flügeltiefe oder beide nach außen abnehmen läßt, und man die Flossen bei negativem Wert η möglichst hoch, und bei positivem Wert η möglichst tief legt.

In wirtschaftlich zulässiger Weise läßt sich das labilisierende Moment p_2 jedenfalls nicht völlig beseitigen. Um ihm starke rückführende Momente gegenüberzustellen, müssen wir p_1 und q_2 möglichst groß und q_1 möglichst klein machen. Wir ersehen aus Gl. (445), daß das Moment p_1 direkt mit dem Winkel der V-Form γ wächst, aus Gl. (446) daß aber damit auch q_1 zunimmt. Abnahme der Flügeltiefe nach außen verkleinert das Moment p_1, doch in geringerem Maße als das Moment p_2. Das günstigste Maß für die Abnahme von Anstellwinkel und Flügeltiefe nach außen, soweit es nicht durch Rücksicht auf die Flugleistung und die Fertigung bestimmt wird, wird man aus dem Vergleich der Gl. (448) und (449) bestimmen, um q_2 möglichst zu steigern und p_2 herabzusetzen. Hohe Lage der Flossen ist p_1 zuträglich. Soweit man überhaupt Freiheit hat, konstruktiv über diese Höhenlage zu verfügen, wird man den Einfluß derselben auf p_1 und p_2 gegeneinander abzuwägen haben.

Um uns von allen diesen Maßnahmen und ihrem Einfluß auf den Charakter der Bewegungen ein anschauliches Bild zu machen, müssen wir uns nur der Definition der Größen q_1, q_2, p_1, p_2 erinnern. p_2 ist dasjenige Moment, welches bei einer Schwenkung durch die Verminderung der Strömungsgeschwindigkeit für die innere Flügelhälfte und ihre Steigerung für die äußere Flügelhälfte das Flugzeug immer stärker auf die Seite zu legen bestrebt, dadurch die Zentripetalkomponente des Auftriebs steigert und die Flugbahn immer stärker krümmt, so daß das Flugzeug, wenn nicht andere Momente hinzutreten, in einer trichterförmigen Spirale („Korkzieher") „abtrudelt". Nun bringt p_1 tatsächlich ein entgegengesetzt gerichtetes Moment auf, das um so größer ist, je mehr der Einfluß von q_2 den Einfluß von q_1 überwiegt; je stärker also, genau analog den Beziehungen bei der Längsstabilität, das dämpfende Moment, welches jede

Drehung des Flugzeugs um die Lotachse zu verhindern sucht, gegenüber dem Moment ist, welches das Flugzeug immer in die augenblickliche Flugrichtung hineinzudrehen bestrebt ist. Denn je weniger das Flugzeug seiner augenblicklichen Flugrichtung folgt, um so größer ist der Winkel, den es dieser gegenüber einschließt, und um so wirksamer ist das Moment p_1, welches infolge des seitlichen Windeinfalls das Flugzeug aus seiner Schräglage wieder aufzurichten bestrebt ist. Hat z. B. das Flugzeug infolge einer geringen Schräglage nach rechts durch die dorthin gerichteten Zentripetalkräfte eine gewisse Geschwindigkeit nach rechts („Rutschen"), so fällt der Wind von rechts in die Tragflächen, vergrößert daher bei V-Form für die rechte Flügelhälfte den Anstellwinkel und verkleinert ihn für die linke. Dadurch erfährt die rechte Flügelhälfte stärkeren Auftrieb, während er auf der linken Hälfte sinkt. Dies Moment bewirkt die Wiederaufrichtung des Flugzeugs aus der Schräglage nach rechts. Doch ist eben hierbei Voraussetzung, daß das Flugzeug sich nicht infolge eines zu starken Richtungsmoments q_1 in die aus dem „Rutschen" und der Eigengeschwindigkeit resultierende Strömungsrichtung der Luft einstellt, sondern durch ein starkes Dämpfungsmoment q_2 die Längsachse dauernd sich selbst parallel gehalten wird, und infolge dessen ein gewisser seitlicher Einfallswinkel der Strömung gegenüber der Längsachse zu stande kommt. In jedem Fall finden die Momente p_1, p_2, ob sie nun wie p_1 die Lagenstörung zu beseitigen oder wie p_2 zu vergrößern streben, erheblichen Widerstand an dem Moment p_3, das jeder Drehung um die Längsachse außerordentlich starken Widerstand entgegensetzt. Dieser beruht darauf, daß eine Winkelgeschwindigkeit um die Längsachse die Anstellwinkel für die eine Flügelhälfte erhöht, für die andere jedoch herabsetzt, und durch die entsprechend geänderten Auftriebskräfte ein recht beträchtliches Moment zustande kommt, das der Drehung widerstrebt. Je geringer die Flügeltiefe der äußeren Flügelelemente, die natürlich hierbei die größten Beiträge liefern, ist, um so mehr wird dieses Dämpfungsmoment herabgesetzt, wie auch aus Gl. (451) zu ersehen ist. Natürlich liefern auch Flossen mit großen vertikalen Abständen y vom Schwerpunkt merkliche Beiträge zu diesem Dämpfungsmoment, gleichgültig, ob sie über oder unter dem Schwerpunkt liegen. Danach ist unabhängig davon, ob man das labilisierende Moment p_2 durch Minderung von Anstellwinkel und Flügeltiefe nach außen herabsetzt, oder ob man es durch V-Form bekämpft, oder, ob man auf derartige Maßnahmen verzichtet, immer $\frac{E_{II}}{C_{II}}$ Gl. (478) geringfügig gegenüber $\left(\frac{D_{II}}{2\,C_{II}}\right)^2$ Gl. (477). Die Wurzeln der entsprechenden Bewegungsgleichung

$$\varLambda = -\frac{D}{2\,C} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2\,C}\right)^2 - \frac{E}{C}} \tag{479}$$

lassen sich also einfach approximieren:

$$\Delta = \frac{D}{2C}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{E}{D}\cdot\frac{2C}{D}}\right) \cong \frac{D}{2C}\left(-1 \pm \left[1 - \frac{E}{D}\cdot\frac{2C}{D}\right]\right) \quad (480)$$

$$(481) \qquad \underline{\Delta} \cong -\frac{D}{C} \qquad\qquad \underline{\underline{\Delta}} \cong -\frac{E}{D}. \qquad (482)$$

Und nach Gl. (477) und (478):

$$(483) \qquad \underline{\Delta_{II}} = \Delta_3 = -p_3 \qquad\qquad \underline{\underline{\Delta_{II}}} = \Delta_4 = \frac{p_2 q_1 - p_1 q_2}{p_3 q_1}. \qquad (484)$$

Die erste der beiden Wurzeln besagt nichts anderes, als daß eine Winkelgeschwindigkeit um die Längsachse stark verzögert wird, also die Halbwertszeit für eine derartige Störung sehr kurz ist.

Um so bedeutsamer ist die zweite Wurzel, die eine wesentlich längere Halbwertszeit von

$$B = \frac{v}{g}\cdot \ln 2 \cdot \frac{p_3 q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} \qquad (485)$$

Sekunden mit sich bringt. Wird der Nenner infolge mangelhafter Stabilisierung ($E_{II} < 0$) negativ, so ändert sich auch das Vorzeichen von B, und B gewinnt damit die Bedeutung einer Doppelwertszeit.

Daraus ergibt sich eine für die Seitenstabilität außerordentlich bedeutsame Folgerung: Die Doppelwertszeit wird selbst bei außerordentlich kleiner Labilität (im engeren Sinne) unendlich kurz, sobald p_3 verschwindet. Da dies nun bei Überschreitung des Maximums der Auftriebszahl, für das natürlich η' verschwindet, der Fall ist, ergibt sich für jedes Flugzeug, das nicht vollkommen ($E_{II} > 0$) stabilisiert ist, die Gefahr sofortigen seitlichen Absturzes, sobald derjenige Anstellwinkel überschritten wird, der dem Maximum der Auftriebszahl zugeordnet ist. Wir erkennen hierin die weitaus häufigste Sturzursache. Die Gefahr liegt natürlich immer dann nahe, wenn man zur Erreichung großer Steiggeschwindigkeit oder Tragfähigkeit an und für sich schon mit großem Anstellwinkel fliegt. So unbedingt der Konstrukteur nach Kapitel II, um mit einem geringsten Flächenausmaß und daher mit einer möglichst leichten Zelle auszukommen, bei der Berechnung der Flügeltiefen möglichst große Auftriebszahlen annehmen muß, so peinlich muß er dennoch darauf bedacht sein, sich von der Grenze dieser überaus großen Gefahr fernzuhalten.

Wendet man die Gleichungen (457) und (460) auf einen Eindecker ohne V-Form ($\gamma = 0$; $p_1 = 0$) an, so liefert Gl. (485):

$$(B) = \frac{v}{g}\ln 2\,\frac{p_3}{p_2} = \frac{v}{g}\cdot \ln 2\,\frac{\eta'}{2\eta} \qquad (486)$$

und man erkennt hieraus ganz allgemein, daß sich die Gefahr des seitlichen Absturzes, soweit dieser nicht durch einen allzu rohen Steuerein-

griff herbeigeführt wird, schon durch eine Abnahme der Doppelwertszeit, d. h. eine deutlich wahrnehmbare Unstetigkeit der seitlichen Lage, ankündigt. Denn die Ableitung η' der Auftriebszahl ändert sich im allgemeinen in der Nähe des Maximums zwar schnell aber stetig. Für $V \cong 100$ km/st. beträgt die Doppelwertszeit $(B) = \frac{\eta'}{\eta}$, also 4 bis 8 Sekunden. Nach einer Störung der Schräglage $\varphi = 0{,}10 (= 6^0)$ liegen Flugzeuge ohne V-Form also nach etwa 12 bis 25 Sekunden unter $\varphi = \frac{\pi}{4} (= 45^0)$.

E. Die Berechnung der Bewegungen.

Die Rückkehr zu den Bewegungsgleichungen, Gl. (467) bis (469), liefert nun wieder (wie oben bei der Betrachtung der Längsbewegungen (S. 102)) die Beziehungen zwischen den drei Veränderlichen. Da wir die Gleichungskonstanten k_1, k_2, k_3 und q_3 von der Bestimmung der Näherungslösungen ausgeschlossen haben, und sie daher in den Näherungswurzeln $\varLambda$ nicht enthalten sind, wollen wir sie auch bei der Bestimmung der Variablen außer acht lassen. Dann erhalten wir aus der Gl. (469) die Beziehung

$$\varLambda \zeta = \varphi \tag{487}$$

und indem wir sie in Gl. (468) einführen

$$\varphi = -\frac{\varLambda^2 + q_2 \varLambda + 2hq_1}{\varLambda + q_2}\psi = -\left(\varLambda + \frac{2hq_1}{\varLambda + q_2}\right)\psi. \tag{488}$$

In der Tat hat also in Übereinstimmung mit den Voraussetzungen die kurze Schwingung um die Lotachse keinen Einfluß auf die seitliche Lage. Denn Gl. (488) liefert mit $\varLambda_I$ Gl. (475) (476) für beliebige Werte ψ:

$$\varphi = 0 \qquad \zeta = 0. \tag{489}$$

Hingegen liefert das zweite Wurzelpaar $\varLambda_3$ und $\varLambda_4$ nach Gl. (268) einen eindeutigen Zusammenhang zwischen ψ und φ:

$$-\mathfrak{A}_3 = \varLambda_3 + \frac{2hq_1}{\varLambda_3 + q_2}, \qquad -\mathfrak{A}_4 = \varLambda_4 + \frac{2hq_1}{\varLambda_4 + q_2}. \tag{490}$$

Und wenn wir das vollständige Integral der einen Variabeln in Rücksicht darauf, daß die Periode der zweiten Schwingung imaginär ist, nach Gl. (259) und (265) schreiben:

$$\psi = e^{u_I t}(m_I \cos \nu_I t - n_I \sin \nu_I t) + l_3 e^{\lambda_3 t} + l_4 e^{\lambda_4 t}, \tag{491}$$

so ist das der andern Variabeln φ, da $\mathfrak{C}_I$ und $\mathfrak{D}_I$ Gl. (269) verschwinden:

$$\varphi = \mathfrak{A}_3 l_3 e^{\lambda_3 t} + \mathfrak{A}_4 l_4 e^{\lambda_4 t}. \tag{492}$$

Bilden wir nun für beide Variabeln die Ableitungen nach der Zeit, so erhalten wir:

$$\dot{\psi} = e^{\mu_I t}[(\mu_I m_I - \nu_I n_I)\cos \nu_I t - (\mu_I n_I + \nu_I m_I)\sin \nu_I t] + \lambda_3 l_3 e^{\lambda_3 t} + \lambda_4 l_4 e^{\lambda_4 t} \tag{493}$$

$$\dot{\varphi} = \mathfrak{A}_3 \lambda_3 l_3 e^{\lambda_3 t} + \mathfrak{A}_4 \lambda_4 l_4 e^{\lambda_4 t}. \tag{494}$$

Und zur Zeit $t = 0$ ergeben sich statt der Gl. (272) die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= m_I + l_3 + l_4 \\ \dot{\psi}_0 &= \mu_I m_I - \nu_I n_I + \lambda_3 l_3 + \lambda_4 l_4 \\ \varphi_0 &= \mathfrak{A}_3 l_3 + \mathfrak{A}_4 l_4 \\ \dot{\varphi}_0 &= \mathfrak{A}_3 \lambda_3 l_3 + \mathfrak{A}_4 \lambda_4 l_4. \end{aligned} \tag{495}$$

Auch hier können wir wieder annehmen, daß Störungen dadurch zu stande kommen, daß das Flugzeug im stetigen Fluge, wo die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\psi}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$ sind, von anders gerichteten Luftströmungen betroffen wird. Dann erhalten wir also mit Gl. (495) aus der Gl. (273) die folgenden Werte für die Integrationskonstanten:

$$m_I : n_I : l_3 : (-l_4) : 1 = \begin{vmatrix} \psi_0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \nu_I & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \varphi_0 & 0 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ 0 & 0 & \lambda_3\mathfrak{A}_3 & \lambda_4\mathfrak{A}_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mu_I & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \varphi_0 & 0 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ 0 & 0 & \lambda_3\mathfrak{A}_3 & \lambda_4\mathfrak{A}_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \mu_I & \nu_I \\ \varphi_0 & \mathfrak{A}_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4\mathfrak{A}_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$: \begin{vmatrix} \psi_0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \mu_I & \nu_I \\ \varphi_0 & \mathfrak{A}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3\mathfrak{A}_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mu_I & \nu_I & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ 0 & 0 & \lambda_3\mathfrak{A}_3 & \lambda_4\mathfrak{A}_4 \end{vmatrix} \tag{496}$$

und indem wir die Determinante entwickeln:

$$m_I = \psi_0 - \varphi_0 \frac{\lambda_4 \mathfrak{A}_3 - \lambda_4 \mathfrak{A}_4}{\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4 (\lambda_3 - \lambda_4)} \tag{497}$$

$$n_I = \psi_0 \frac{\mu_I}{\nu_I} + \varphi_0 \frac{\lambda_3 \lambda_4 (\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_4) - \mu_I (\lambda_3 \mathfrak{A}_3 - \lambda_4 \mathfrak{A}_4)}{\nu_I \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4 (\lambda_3 - \lambda_4)} \tag{498}$$

$$l_3 = - \varphi_0 \frac{\lambda_4}{\mathfrak{A}_3 (\lambda_3 - \lambda_4)} \tag{499}$$

$$l_4 = \varphi_0 \frac{\lambda_3}{\mathfrak{A}_4 (\lambda_3 - \lambda_4)}. \tag{500}$$

Statt der Wurzeln λ können hierin die auf die Zeiteinheit $\frac{v}{g}$ bezogenen Wurzeln Λ (483), (484) eingeführt werden, durch die wir bereits in Gl. (490) die $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ definiert haben. — Eine seitliche Richtungsänderung des Windes ψ_0 hat also wesentlich nur eine kurze Schwingung

um die Lotachse in der Art einer Windfahne zur Folge. Hingegen bringt eine Lagenänderung wie sie dadurch entstehen kann, daß eine Luftströmung anderer Größe oder Richtung nur einen Teil der Zelle trifft, sowohl eine kurze Drehungsschwingung $(\mu_I \nu_I)$ wie auch eine langsame aperiodische Bewegung $(\lambda_3 \lambda_4)$ mit sich. Dabei kommt die kurze Schwingung natürlich auch nur in Drehungen um die Lotachse, also in nur „scheinbaren“ Kursänderungen zur Geltung, wohingegen die aperiodische Bewegung sich wesentlich auf die Schräglage beschränkt. Für die Änderungen der Schräglage ist also ausschließlich das zweite Wurzelpaar Λ_3 und Λ_4 Gl. (483), (484) maßgebend, wie dies schon Gl. (492) zum Ausdruck bringt. Führen wir hier die Gl. (499) nnd (500) ein, so ergibt sich:

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\lambda_3 - \lambda_4} \left(-\lambda_4 e^{\lambda_3 t} + \lambda_3 e^{\lambda_4 t}\right) = \frac{\varphi_0}{\Lambda_3 - \Lambda_4} \left(-\Lambda_4 \cdot e^{\Lambda_3 \frac{tg}{v}} + \Lambda_3 e^{\Lambda_4 \frac{tg}{v}}\right). \quad (501)$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\zeta_0 = 0$ folgt mit Gl. (487) hieraus der Winkel der Wendung ζ in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\zeta = \frac{\varphi_0}{\Lambda_3 - \Lambda_4} \left[-\frac{\Lambda_4}{\Lambda_3} \left(e^{\Lambda_3 \frac{tg}{v}} - 1\right) + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_4} \left(e^{\Lambda_4 \frac{tg}{v}} - 1\right)\right]. \quad (502)$$

F. Die Berechnung von Quersteuern und Seitensteuern.

Wir haben jedoch nicht nur die Folge von Störungen zu betrachten, die von außen, also gewissermaßen durch höhere Gewalt, hervorgerufen werden, sondern auch solcher Störungen, die der Führer willkürlich herbeiführt, um das Flugzeug in eine neue Gleichgewichtslage zu bringen. In diesem Falle ist es eine Änderung des Kurses ζ, die vom Führer angestrebt wird, und die er auf zweierlei Weise erreichen kann. Er kann entweder mit dem „Quersteuer“ das Flugzeug schräg $(\varphi \neq 0)$ legen — dann führt die seitliche (zentripetale) Komponente des Auftriebs die Kursänderung herbei (s. Fig. 42), oder er tritt das „Seitensteuer“ aus, dann findet durch die Richtungsänderung der Flugzeuglängsachse zunächst nur eine scheinbare Kursänderung ψ statt. Gleichzeitig wird jedoch die Richtung des Vortriebs geändert, und diese seitliche Komponente des Schubes bringt erst tatsächlich eine Kursänderung hervor. Ist das Flugzeug seitlich labil, so legt es sich schließlich unter der Wirkung des oben

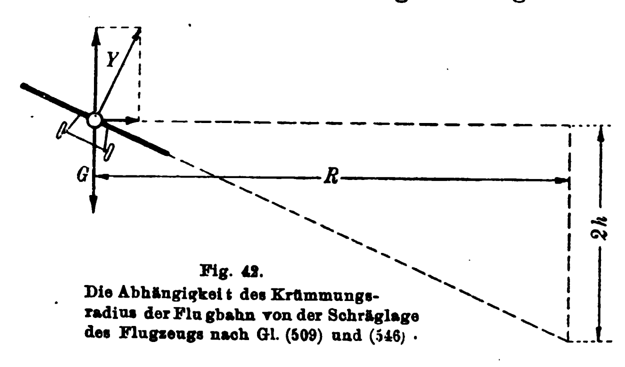


Fig. 42.
Die Abhängigkeit des Krümmungsradius der Flugbahn von der Schräglage des Flugzeugs nach Gl. (509) und (546).

hinreichend charakterisierten Moments p_2 schräg, und damit kommt dann wieder der Auftrieb mit einer zentripetalen Komponente zur Geltung. Ist das Flugzeug jedoch durch V-Form stabilisiert, so bringt schon die scheinbare Kursänderung ψ durch den seitlichen Windeinfall ein schräglegendes Moment p_1 hervor. Dann tritt also eine zentripetale Wirkung des Auftriebs wesentlich schneller in Erscheinung. Das Seitensteuer ist demnach um so wirksamer, je stärker die V-Form ist; aber es ist nie so wirksam zum Zwecke der Kursänderung wie das Quersteuer. Denn zu einer schnellen Kursänderung bedarf man starker Zentripetalkräfte. Und hierfür stellt man von den drei äußeren Kräften: Gewicht, Schub und Luftkraft die größte: die Luftkraft durch das Quersteuer ohne weiteres zur Verfügung, während das Seitensteuer je nach dem Stabilitätsgrad des Flugzeugs nur mehr oder weniger mittelbar eine Schräglage herbeiführt. Ja, es gibt Fälle — wenn die Seitensteuer nur wenig hinter dem Schwerpunkt liegen und daher verhältnismäßig groß sind — in denen die wagerechte, zur Flugrichtung normale Komponente des Schubs $S \cdot \psi$, die bei Seitensteuerbetätigung zunächst allein die Kursänderung herbeiführen muß, von den entgegengesetzt gerichteten Kräften des Seitensteuers bei ausgelegtem Ruder zu nichte gemacht und wohl gar übertroffen wird. Dann setzt das Flugzeug, wenn auch für den Führer unmerklich, zu einer Wendung nach entgegengesetzter Seite als gewünscht an und wird erst durch das Moment p_2, das die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Lotachse wachruft, nach der richtigen Seite schräg gelegt und zur Wendung gebracht. Jedenfalls kann man für den normalen Flug auf Seitensteuer überhaupt verzichten; denn sicherer und schneller als durch Seitensteuer ändert man die Lage und damit den Kurs durch die Quersteuer. Es bedeutet also eine unnötige Belastung des Flugzeugführers, wenn man ihn zwingt, während des ganzen Fluges den Fußhebel, durch den das Seitensteuer betätigt wird, nicht zu verlassen. Gerade wie für das Höhensteuer hat man auch für das Seitensteuer eine Feststellvorrichtung anzuordnen, die es dem Führer ermöglicht, den Seitensteuerfußhebel zu arretieren und die Füße davon zu entfernen.

Immerhin kann man in Rücksicht auf gelegentliche Anforderung hoher Wendigkeit sowie Start und Landung auf Seitensteuer nicht ganz verzichten. Denn solange bei An- und Auslauf beide Räder der Laufachse den Boden berühren, kann man natürlich nicht mit dem Quersteuer arbeiten. Ja, man benötigt sogar, wenn das Flugzeug sich überhaupt nur in Bodennähe befindet, das Quersteuer ausschließlich und ganz dazu, eine Schräglage, bei der die Flügelspitzen den Boden berühren könnten, zu verhindern; und bedarf dann des Seitensteuers, um Bodenhindernissen auszuweichen. Im besonderen hat man beim Landen mit Seitenwind mit Hilfe des Seitensteuers das Flugzeug im letzten Augenblick vor dem Auf-

setzen in die Richtung der Bewegung gegenüber Boden einzuschwenken, damit die Laufräder nicht seitlich beansprucht werden. Die damit verbundene Neigung des Flugzeugs sich schräg zu legen, muß man dann gleichzeitig durch das Quersteuer aufheben.

Um die Wirkung von Seiten- und Quersteuern quantitativ beurteilen zu können, haben wir uns wieder den Bewegungsgleichungen (463) bis (465) zuzuwenden. Man kann auch hier annehmen, daß die gegebenen Steuermomente nach unendlich langer Zeit einen neuen Gleichgewichtszustand herstellen, der sich von dem früheren um bestimmte Beträge ψ_0 φ_0 unterscheidet. Zwingt man z. B. ein Flugzeug je nachdem, ob es stabil oder labil ist, durch „Verwindung“ oder „Gegenverwindung“ in der Kurve zu bleiben, so ist damit ein neuer Gleichgewichtszustand geschaffen, bei dem das Flugzeug dauernd in einem Kreis von gegebenem Krümmungsradius fliegt. Aber man kann ganz allgemein, unabhängig davon, ob der neue Gleichgewichtszustand überhaupt erreicht wird oder ob er überhaupt möglich ist, aus der Bewegungsgleichung die Änderungen φ_0, ψ_0 bestimmen, die die Zusatzmomente der Quersteuer ΔM_l und der Seitensteuer ΔM_s nach unendlich langer Zeit in Wirklichkeit genau genug natürlich schon nach mehrfacher Halbwertszeit zur Folge haben würden. Man bezieht auch hier wieder wie oben die Bewegung, die durch die Variabeln φ und ψ gekennzeichnet wird, auf den neuen Gleichgewichtszustand und betrachtet den früheren als eine Störung des neuen. Für jeden Gleichgewichtszustand müssen aber die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$, und für den neuen Gleichgewichtszustand außerdem die Winkelbeschleunigungen verschwinden.

Definieren wir nun in Anlehnung an Gl. (442), (443) die Zusatzmomente vom Quersteuer ΔM_l und vom Seitensteuer ΔM_s, die als Störungsfunktion in die Bewegungsgleichungen einzuführen sind, mit:

$$(503) \qquad p_4 = \frac{\Delta M_l}{Y \cdot r_l^2} \qquad\qquad q_4 = \frac{\Delta M_s}{Y \cdot r_s^2}, \qquad (504)$$

so folgt für verschwindende $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$ aus Gl. (463) bis (465)

$$0 = p_1 \psi_0 + p_2 \frac{\varphi_0}{2h} + p_4, \qquad 0 = q_1 \psi_0 + q_2 \frac{\varphi_0}{2h} - q_4. \qquad (505)$$

Die Auswertung der Gleichungen führt mit Gl. (483), (484) auf

$$\psi_0 = \frac{p_2 q_4 + p_4 q_2}{p_2 q_1 - p_1 q_2} = -\frac{p_2 q_4 + p_4 q_2}{q_1 A_3 A_4} \qquad (506)$$

$$\varphi_0 = -2h \cdot \frac{p_1 q_4 + p_4 q_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2} = 2h \frac{p_1 q_4 + p_4 q_1}{q_1 A_3 A_4}. \qquad (507)$$

Diese Beträge sind nun als Anfangsstörung in der Determinante Gl. (496) bzw. (497) bis (500) einzuführen, um aus den Gl. (491) und (492)

bzw. (501) die resultierende Bewegung zu bestimmen. Dabei haben wir im Auge zu behalten, daß wir die Störungen φ und ψ und deren Anfangswert φ_0 und ψ_0 auf einen Gleichgewichtszustand beziehen, der erst nach „unendlich" langer Zeit eintreten wird; ja, es war nicht einmal nötig anzunehmen, daß er überhaupt eintreten wird: Sei es, daß er gar keinen möglichen Gleichgewichtszustand darstellt, oder, daß, bevor er erreicht ist, der Führer das Steuer umlegt. Was uns jedoch ausschließlich interessiert, ist die Kenntnis der Bewegungen, bezogen auf den früheren Gleichgewichtszustand. In bezug auf diesen ändert sich z. B. die Schräglage um:

$$\varphi_0 - \varphi = \varphi_0 \frac{A_4\left(e^{A_3 \frac{tg}{v}} - 1\right) + A_3\left(e^{A_4 \frac{tg}{v}} - 1\right)}{A_3 - A_4}. \tag{508}$$

Dementsprechend setzt nach Gl. (465) aus dem Geradeausflug heraus eine Kursänderung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\zeta}{dt} = \dot{\zeta} = \frac{g}{v} \cdot (\varphi_0 - \varphi) \tag{509}$$

ein. Und daraus folgt der Winkel der Wendung ζ in Abhängigkeit von der Zeit mit Gl. (507):

$$\zeta = \int_0^t (\varphi_0 - \varphi)\, d\,\frac{t \cdot g}{v} = \varphi_0 \left| \frac{(A_3 - A_4)\cdot \frac{t \cdot g}{v} + \frac{A_4}{A_3} e^{A_3 \frac{tg}{v}} - \frac{A_3}{A_4} e^{A_4 \frac{tg}{v}}}{A_3 - A_4} \right|_0^t \tag{510}$$

$$= 2h\left(p_4 + \frac{p_1}{q_1} \cdot q_4\right) \frac{A_3 A_4 (A_3 - A_4)\frac{t \cdot g}{v} + A_4^2\left(e^{A_3 \frac{tg}{v}} - 1\right) - A_3^2\left(e^{A_4 \frac{tg}{v}} - 1\right)}{A_3^2 A_4^2 (A_3 - A_4)}.$$

Die Gleichung vereinfacht sich wesentlich, wenn wir, da A_4 sehr klein gegenüber A_3 ist $(A_3 - A_4) \sim A_3$ setzen:

$$\zeta = \frac{2h}{A_3}\left(p_4 + \frac{p_1}{q_1} \cdot q_4\right)\left(\frac{t \cdot g}{v A_4} + \frac{e^{A_3 \frac{tg}{v}} - 1}{A_3^2} - \frac{e^{A_4 \frac{tg}{v}} - 1}{A_4^2}\right). \tag{511}$$

Die Formel steht in scheinbarem Widerspruch mit der Erfahrung. Denn sie besagt, daß das Seitensteuer eine Kursänderung überhaupt nur dann bewirkt, wenn ein stabilisierendes Moment p_1 zur Verfügung steht, daß es jedoch unwirksam ist, wenn die Tragflügel keine V-Form haben. Die Formel scheint also das Seitensteuermoment in seiner Bedeutung für die Seitensteuerung zu unterschätzen. Das ist jedoch lediglich eine Folge der Voraussetzungen unserer Rechnung. Denn diese sprechen der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ nur geringe Größe zu, wie sie etwa gelegentlich der „Einstellung in den Wind" (Windfahne) auftreten; während ein endliches Moment q_4 natürlich eine bedeutende Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ wachrufen muß, die, wie schon erwähnt, durch Vermittlung von p_2 eine Schräg-

legung und damit eine Kursänderung zur Folge hat. Aber eben, daß nur große Winkelgeschwindigkeiten einen Steuererfolg haben, beweist die oben schon qualitativ ausgesprochene Unzulänglichkeit der Wirkung der Seitensteuer. Sehen wir daher, in Übereinstimmung mit unserem Berechnungsvorgang, von der untergeordneten Bedeutung der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ ab, so gilt Gl. (511) selbst für große Werte ζ und hat somit hervorragende Bedeutung. Besonders übersichtliche Beziehungen erhält man im Fall der statischen Indifferenz. Wenn mit E_{II} Gl. (482) Δ_4 Gl. (484) verschwindet, wird ζ Gl. (510) ein unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$. Um seinen Wert festzustellen, haben wir Nenner und Zähler nach Δ_4 zu differenzieren und dann wieder $\Delta_4 = 0$ zu setzen; da diese ersten Ableitungen wieder verschwinden und somit abermals einen unbestimmten Ausdruck liefern, ist die Differentiation zu wiederholen. So erhalten wir schließlich:

$$(\zeta) = \left(p_4 + \frac{p_1}{q_1} \cdot q_4\right)\left(\frac{v^2}{g}\,\frac{1 - e^{-p_3 \frac{tg}{v}}}{p_3^2} - \frac{v \cdot t}{p_3^2} + \frac{g \cdot t^2}{2 p_3}\right). \tag{512}$$

Schon nach außerordentlich kurzer Zeit treten die beiden ersten Glieder der Klammer gegenüber dem dritten stark zurück. Man erhält also eine recht gute Näherung mit:

$$\zeta \cong \left(p_4 + \frac{p_1}{q_1} \cdot q_4\right) \frac{g \cdot t^2}{2 p_3}. \tag{513}$$

Und ebenso für die Schräglage nach Gl. (508)

$$\varphi_0 - \varphi \cong \left(p_4 + \frac{p_1}{q_1} \cdot q_4\right) \frac{t \cdot v}{p_3}. \tag{514}$$

Während der ersten Sekunde ($t = 1$) ist die Änderung der Schräglage also $\frac{2v}{g} = 6$ bis 8 mal so groß als die des Kurses und bei starker „Wendigkeit" ist bereits die Grenze zulässiger Schräglegung erreicht, bevor eine nennenswerte Wendung stattgefunden hat. Man hat also neben Gl. (513), die sie sich auf ungleichförmige Bewegung bezieht, stets noch für unveränderliche Schräglage Gl. (509) heranzuziehen. Denn sobald diese einen gewissen Betrag erreicht hat, muß der Führer den Steuerausschlag rückgängig machen bis auf ein Maß, das vom Grad der seitlichen Stabilität abhängig ist: Bei stabilen Flugzeugen muß ein bestimmter Ausschlag in dem Sinne bestehen bleiben, die Schräglage zu vergrößern; bei labilen hingegen muß das Steuer in dem Sinne ausgelegt werden, die Schräglage rückgängig zu machen (sog. Gegenverwindung). Die Größe der erforderlichen Momente p_4 bzw. q_4 folgt für die als zulässig erachtete Schräglage φ_0 aus Gl. (507). Die dieser Schräglage entsprechende stetige Kursänderung ergibt sich aus Gl. (509):

$$\zeta = \varphi_{zul} \cdot \frac{t \cdot g}{v} \qquad (515)$$

und fordert für eine halbe Wendung („Kehrt“ $\zeta = \pi$):

$$t = \frac{\pi}{\varphi_{zul}} \cdot \frac{v}{g} \qquad (516)$$

also etwa 10 bis 20 Sekunden, wenn wir $\frac{\pi}{4}$ bis $\frac{\pi}{3}$ (45° bis 60°) als äußerst zulässige Schräglage betrachten. Denn über diese Schräglage hinaus nimmt die „Hubkomponente“ des „Auftriebs“ so schnell ab, daß eine starke abwärtsgerichtete Beschleunigung das Flugzeug dem seitlichen Absturz ($\varphi = \pi$) immer näher bringt. Es ist lediglich in das Ermessen des Führers gestellt, wie weit er mit der Herabsetzung der Geschwindigkeit und der Schräglegung gehen will, um möglichst schnell zu wenden. Alle Flugzeuge verhalten sich in dieser Beziehung gleich; der Konstrukteur hat hier keinerlei Einfluß. Das Einzige was von ihm je nach Art und Beruf des Flugzeugs gefordert werden darf, ist, daß das Umlegen bis zur größten zulässigen Schräglage nicht zu viel Zeit erfordert. Wollen wir, der Sicherheit halber, annehmen, daß hierzu ausschließlich das Quersteuer verwendet wird, so erhalten wir schließlich als „Maßstab der Wendigkeit“ die Zeit zum Umlegen bis zur größten zulässigen Schräglage φ_{zul} aus Gl. (514) zu:

$$t = \frac{p_3}{p_4} \cdot \frac{\varphi_{zul}}{v} \, . \qquad (517)$$

Ist die mittlere Änderung der Auftriebszahl der Flügelenden, die ein Ruderausschlag der Quersteuer zur Folge hat, $\Delta\eta$ und erstrecken sich die Querruder über einen Bruchteil $\varkappa$ der Spannweite, so ergibt sich das Moment der Querruder zu:

$$\Delta\eta \cdot \varkappa F \cdot \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right) b \,\frac{\varrho}{2}\, \varrho \cdot v^2 \text{ kg m} \qquad (518)$$

erreicht also, wie selbstverständlich, einen Größtwert $\varkappa = 1$, d. h., wenn die Querruder die ganze Breite einnehmen. Freilich ist, wie aus der Darstellung von

$$f(\varkappa) = \varkappa \cdot \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right) \qquad (519)$$

über $\varkappa$ in Fig. 43 hervorgeht, der Gewinn, den sehr breite Querruder gegenüber schmäleren bringen, infolge ihrer kleinen Hebelarme nur gering und läßt sich in Anbetracht der Erschwerung der Konstruktion und der Ruderbetätigung

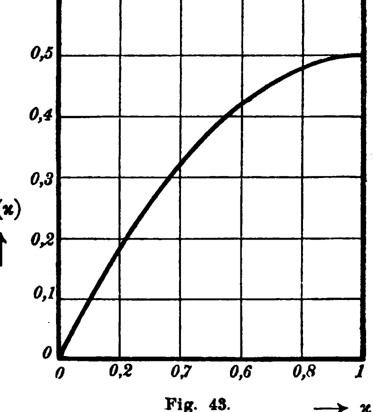


Fig. 43. Die Größe des Verwindungsmoments in Abhängigkeit von der verhältnismäßigen Breite der Querruder.

nicht rechtfertigen. Es ist kaum zu empfehlen, selbst wenn außerordentlicher Wert auf Wendigkeit gelegt wird, über $\varkappa = \frac{1}{2}$ hinauszugehen, d. h., den Querrudern eine Breite von mehr als ein Viertel der Spannweite zu geben.

Für einen Eindecker liefert Gl. (517) mit Gl. (460) und (518):

$$t = \frac{\eta'}{6 \Delta \eta} \cdot \frac{b}{f(\varkappa)} \cdot \frac{\varphi_{zul}}{v} . \qquad (520)$$

Der erste Faktor wird, da $\Delta \eta < 0{,}30$ mindestens gleich Eins, $f(\varkappa)$ höchstens gleich ein Drittel, $\varphi_{zul} \cong \frac{\pi}{3}$ also

$$t_{min} = \frac{\pi \cdot b}{v} . \qquad (521)$$

Die Zeit zum Umlegen um etwa $\frac{\pi}{3}$ (60°) beträgt also mindestens eine Sekunde für geringe ($\cong$ 10 m), zwei Sekunden für mittlere ($\cong$ 20 m) und drei Sekunden für große Spannweiten (> 30 m). Dabei ist hervorzuheben, daß große Geschwindigkeit der „Wendigkeit", Gl. (521), zuträglich ist, die „Wendung" selbst aber, Gl. (516), verzögert. Da letztere im allgemeinen länger dauert als das Umlegen, ist im allgemeinen eine Verringerung der Geschwindigkeit von Vorteil. Freilich sinkt auch mit zunehmendem Anstellwinkel der durch den größten Ruderausschlag verfügbare Betrag $\Delta \eta$. Denn wenn der Anstellwinkel bereits an sich groß ist, die Auftriebszahl also ihrem Größtwert bereits nahe ist, so kann der Ruderausschlag nach unten auf der einen Seite nicht mehr einen gleichen Zuwachs bringen, als der Ausschlag nach oben auf der andern Seite die Auftriebszahl herabsetzt. Dann erfolgt also auch aus diesem Grunde das Umlegen langsamer bei Verminderung der Geschwindigkeit. Aber wir müssen uns auch gegenwärtig halten, daß das mit Gl. (517) gegebene Maß der Wendigkeit sich auf Indifferenz bezieht; daß also bei labilen Flugzeugen das Quersteuermoment in seiner Wirkung noch erheblich vom labilisierenden Moment p_2 und bei stabilen Flugzeugen, wenn der Führer gleichzeitig das Seitensteuer austritt, vom stabilisierenden Moment p_1 unterstützt wird.

G. Folgen mangelhafter Symmetrie des Flugzeugs.

Die Abhängigkeit der Wendigkeit von der Geschwindigkeit und alle die hiermit zusammenhängenden verwickelteren Beziehungen zwischen Höhen- und Seitensteuerbetätigung bei Drehungen um große Winkel machen sich schon bei kleinen Winkeln geltend, wenn das Flugzeug nur einen Motor hat. Denn dann bedeuten Drehungen um Achsen, die zur

Rotationsachse von Motor und Schraube senkrecht stehen, Änderungen des statischen Moments der Bewegungsgröße der umlaufenden Massen. Und diese Änderungen haben als Reaktion ein Kräftepaar zur Folge, das eine Drehung senkrecht zu der erwünschten herbeiführt. Diese Wirkungen sind besonders bei Anwendung von Rotationsmotoren, die natürlich erheblich größere Trägheitsmomente besitzen als Standmotoren, sehr störend. Man erhält dann für den üblichen Drehsinn der Schraube (Uhrzeigersinn gesehen in der Flugrichtung) bei einer Wendung nach links ein Drehmoment, welches das Flugzeug aufzurichten sucht; bei einer Wendung nach rechts ein Moment, welches den Anstellwinkel zu verkleinern sucht. Und umgekehrt rufen beträchtliche Drehungen um die wagerechte Achse, wie sie z. B. bei dem üblichen Schwanzflossentyp beim Anheben des Schwanzes bei Beginn des Starts stattfinden, merkliche Kräftepaare um die Lotachse hervor, welche das Flugzeug (beim üblichen Drehsinn der Schraube nach links) zu schwenken suchen. Diese rein dynamischen Einflüsse kann man durch Einschaltung einer Übersetzung zwischen Motor und Schraube, die ja auch hinsichtlich der Steigerung des Wirkungsgrades der Schraube und der Ausnützung des Hubvolumens durch Erhöhung der Motordrehzahl von Vorteil ist, erheblich mildern; ja, wenn die Trägheitsmomente der entgegengesetzt umlaufenden Massen von Motor und Schraube den Drehzahlen (dem Übersetzungsverhältnis) umgekehrt proportional sind, verschwindet die dynamische Beeinflussung des Flugzeugs vollkommen. Nicht beseitigen läßt sich jedoch die Reaktion der Luft auf die Schraube, der man durch eine leichte Verwindung der Tragflächen begegnen muß. Dies geschieht gewöhnlich von vornherein durch die Art der Verspannung der Zelle, indem man bei Flugzeugen mit nur einer Schraube vom üblichen Drehsinn den Hinterholm der rechten Flügelhälfte ein wenig höher legt als den der linken. Dadurch wird links der Auftrieb stärker als rechts und damit die Wirkung der Luft auf die Schraube ausgeglichen. Denn dieser äußert sich entsprechend der Rechtsdrehung der Schraube ebenso, als ob bei wagerechter Lage desselben gegen das rechte Blatt ein sehr kräftiger Luftstrom von unten, gegen das linke von oben bliese. Solange der Motor mit voller Drehzahl läuft, zeigt also das Flugzeug das Bestreben, sich nach links zu neigen, und ist nicht das Flugzeug von vornherein in der angegebenen Weise verspannt, so muß man während des ganzen Fluges ein wenig nach rechts verwinden. Diese Verwindung hat nun, gleichgültig, ob sie von vornherein oder erst während des Fluges durch einen Quersteuerausschlag herbeigeführt wird, natürlich auf der stärker tragenden Flügelhälfte einen größeren Widerstand zur Folge, als bei der schwächer tragenden, und dementsprechend muß dauernd ein entgegengesetzt gerichtetes Moment mit Hilfe des Seiten-

steuers ausgeübt werden. Die durch Quersteuer- und Seitensteuerausschlag bedingten Abweichungen der Symmetrie des Flugzeugs haben natürlich nun den Einfluß, daß Geschwindigkeitsschwankungen seitliche Richtungs- und Lagenänderungen herbeiführen können usf. Aber diese Wirkungen sind so geringfügig, daß es sich nicht lohnt, sie quantitativ zu verfolgen

VIII. Anlauf und Landung.

A. Allgemeines.

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir alle Grundlagen für die Berechnung derjenigen Teile des Flugzeugs, die beim Flug eine Rolle spielen, gegeben. Wir haben nunmehr nur noch die Vorgänge bei Anlauf und Landung zu beschreiben, um daraus die letzten konstruktiven Folgerungen zu entnehmen, die sich auf die Anlauf- bzw. Landevorrichtungen beziehen. Wir wollen uns dabei auf diejenigen Vorrichtungen beschränken, die bei der Bewegung auf festem, unbeschneitem Boden erforderlich sind. Daraus werden sich ohne weiteres Richtlinien für Schwimmer- bzw. Kufenkonstruktionen ergeben für See- bzw. Schneeflugzeuge. Die Vorgänge beim An- und Abwassern bei verschiedenem Seegang sind freilich so verwickelt, daß endgültige, unbestrittene Grundlagen für die Konstruktion von Schwimmern überhaupt noch nicht aufgestellt werden können.

Es ist selbstverständlich, daß man durch Verkürzung von Anlauf und Auslauf die Abmessungen der Flugplätze auf ein geringstes Maß herabzudrücken bestrebt ist. Man wird also für den Anlauf die Reibung, die durch den Auflagedruck des Flugzeugs auf den Boden hervorgerufen wird, so klein, für den Auslauf so groß als möglich zu machen suchen. Denn beim Anlauf erfordert die Reibung einen Energieaufwand, der zweckmäßiger zur Beschleunigung des Flugzeugs verwendet würde, während man beim Auslauf die Verzögerung so schnell als möglich zu vollziehen sucht. In jedem Fall wird man das Flugzeug, um es nicht an unvorhergesehenen Geländewellen Stößen auszusetzen, so kurz als möglich mit dem Boden in Berührung lassen, es also beim Anlauf abheben, so bald die kleinste Geschwindigkeit erreicht ist, die zum Schweben in Bodennähe gerade erforderlich ist und bei der Landung nicht eher in Berührung mit dem Boden kommen lassen, als bis die Geschwindigkeit auf eben dieses Maß herabgesetzt ist. Manche Führer ziehen freilich beim Start vor, das Flugzeug nicht vom Boden weg mit dem größten Anstellwinkel, der geringste Vortriebsleistung fordert und daher die Erreichung kürzester Steigzeiten gestattet, steigen zu lassen, um durch die Steige-

rung der „Wendigkeit“, die, wie wir feststellten, mit der Geschwindigkeit wächst, Bodenhindernissen ausweichen und atmosphärische Störungen, die gerade in Bodennähe sehr häufig sind, eher überwinden zu können. Für die Konstruktion der Anlaufvorrichtung kommt jedoch lediglich die geringste Schwebegeschwindigkeit in Frage, mit der der Führer das Flugzeug „abheben“ kann, und was nach dem Abheben geschieht, ist ausschließliche Sache des Führers und hat mit dieser Konstruktion garnichts zu tun. Unbedingt unrichtig ist es jedoch, in Anbetracht der schon erwähnten Gefährdung des Flugzeugs durch Stöße, deren Stärke bekanntlich mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst, bei der Landung („Roll-Landung“) das Flugzeug bereits in Berührung mit dem Boden kommen zu lassen, bevor seine Geschwindigkeit durch den Luftwiderstand nicht soweit herabgesetzt ist, daß man es durch weitere Vergrößerung des Anstellwinkels nicht mehr über dem Boden schwebend erhalten kann.

Die Verkürzung der Anlaufstrecke fordert harten, ebenen Boden und elastische Räder mit ausgezeichneter Lagerung; während die Auslaufstrecke um so geringer wird, je weniger fest der Boden und je größer die Reibung der Stützpunkte des Flugzeugs ist. Bei Fahrzeugen jeder Art vergrößert man die Reibung der Stützpunkte durch Bremsen. Im allgemeinen hat ein Flugzeug nur drei Stützpunkte, die ja auch zur statisch bestimmten, stabilen Abstützung des Schwerpunkts gegenüber der Schwerkraft genügen, wenn die Lotrechte durch den Schwerpunkt innerhalb des durch die drei Stützpunkte bestimmten Dreiecks liegt. Aus Symmetriegründen liegt dann einer dieser Stützpunkte in der Symmetrieebene selbst, während sich die beiden andern in gleichen Abständen rechts und links von der Symmetrieebene befinden. Auf diese beiden Punkte kommt immer der größte Teil der Last, gleichgültig, ob der dritte Stützpunkt vor oder hinter beiden liegt. Die beiden Stützpunkte werden gebildet von zwei Laufrädern, die federnd gelagert sind. Da sie die Hauptlast tragen, liegt es nahe, an ihnen die Bremsen angreifen zu lassen, da die Bremswirkung natürlich mit dem Auflagerdruck des gebremsten Rades zunimmt. Aber da die Räder keine gemeinsame Achse haben, man also jedes Rad für sich abbremsen müßte, läuft man immer Gefahr, daß die Bremswirkung auf beiden Seiten nicht durchaus gleich ist und daher beim Landen unerwünschte, ja verhängnisvolle Wendungen des Flugzeugs eintreten.[1]) Gelingt es nicht, diese Gefahr zu umgehen, so ist man zur Verkürzung des Auslaufs darauf angewiesen, ledig-

---

1) Verfasser hat der Luftverkehrs-Gesellschaft (L. V. G.), Berlin, einen Schutzanspruch übergeben, wonach die mit dem Seitensteuerfußhebel regelbare Bremswirkung bewußt zur Richtungsänderung beim Ausrollen herangezogen wird.

lich die Reibung des dritten Stützpunktes zu erhöhen, da die von diesem geübten verzögerten Kräfte infolge ihrer Lage in der Symmetrieebene Drehungen nicht zur Folge haben können. Man wird also die rollende Reibung, die auch der dritte Stützpunkt beim Anlauf haben muß, beim Auslauf durch gleitende ersetzen, indem man das Rad abbremst oder durch eine Kufe („Hemmschuh") ablöst.

B. Anlauf.

Bezeichnen wir nach Fig. 44 mit P_I die Auflagekraft und mit d_I den Abstand derselben vom Schwerpunkt, für den (die) vor dem Schwerpunkt liegenden Stützpunkt(e) und analog P_{II}, d_{II} für die hinter dem Schwerpunkt wirksame Stützkraft, so ist bei Reibungszahlen $\mu_I\ \mu_{II}$ das Moment aller Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt, wenn dieser c m über dem Boden liegt:

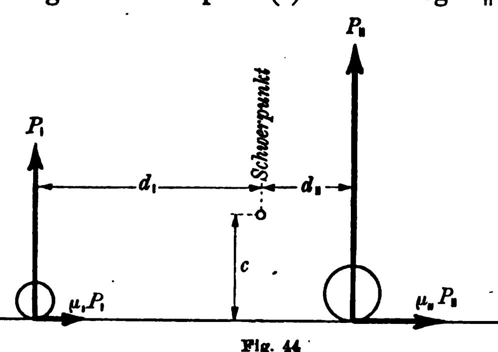


Fig. 44 dient der Berechnung der Auflagerkräfte und der von ihnen wachgerufenen Momente und Reibungskräfte für Anlauf und Auslauf.

$$M_q + Ss + P_I d_I - P_{II} d_{II} - c(P_I \mu_I + P_{II} \mu_{II}) = 0. \quad (522)$$

Läßt man die meist sehr kleine Exzentrizität des Schubes s außer acht, und nimmt an, wie ja bei indifferenter Schwerpunktslage bei beliebigem Anstellwinkel zutrifft, daß auch das Moment der Luftkräfte in bezug auf den Schwerpunkt verschwindet, so besteht die Beziehung:

$$\frac{P_{II}}{P_I} = \frac{d_I - \mu_I \cdot c}{d_{II} + \mu_{II} \cdot c}. \quad (523)$$

Die Stützkraft vor dem Schwerpunkt wächst also beim Beginn der Bewegung durch das negative Moment der Reibungskräfte, und dementsprechend nimmt die Stützkraft hinter dem Schwerpunkt ab, ja sie verschwindet, wenn der Abstand der vorderen Stützkraft sehr gering $d_I \leq \mu_I \cdot c$ ist. Dies zeigt die Möglichkeit, den dritten Stützpunkt, der für den Auslauf möglichst große verzögernde Kräfte liefern soll, von vornherein als Kufe auszubilden, da bei verschwindendem Auflagedruck beim Anlauf seine Form keine Rolle spielt. In der Tat hat man bei fast allen bisherigen Flugzeugtypen diesen Sonderfall, daß der hinter dem Schwerpunkt liegende Stützpunkt mit Hilfe des ebenfalls hinter dem Schwerpunkt liegenden Höhensteuers durch die Wirkung des Schraubenwindes aus dem Stand heraus vom Boden abgehoben wird, das Flugzeug also

beim Anlauf nur durch die kurz vor dem Schwerpunkt liegende Laufradachse gestützt wird. Ja, man kann natürlich entsprechend der beträchtlichen Wirkung des Schraubenwindes den Betrag $d_{\text{I}} = \mu_{\text{I}} c$ erheblich überschreiten (man geht in der Praxis bis $d_{\text{I}} = 0{,}25 c$) und erhält dadurch, wie erwünscht, größere Auflagekräfte für die Kufe beim Auslauf, worauf wir später zurückzukommen haben. Andrerseits ist es eben nur dann zulässig, den Auflagedruck P_{II} zum Verschwinden zu bringen, wenn auch das Seitensteuer im Schraubenwind liegt. Denn nur dann genügt das Seitensteuer, bevor das Flugzeug erhebliche Fahrtgeschwindigkeit hat, dazu, Richtungsänderungen, wie sie gerade während des Anlaufs durch Bodenunebenheiten eintreten, wieder rückgängig zu machen. Liegt das Seitensteuer nicht im Schraubenwind, so muß das Flugzeug während des Anlaufs mit Hilfe des in der Symmetrieebene gelegenen Rades gelenkt werden, und man hat daher diesem einen hinreichenden Auflagedruck zu geben, der andererseits nicht zu groß sein darf, damit die Steuerung des Rades selbst nicht zu sehr erschwert wird.

Neben der Momentengleichung haben wir nun noch für den Anlauf die Gleichung der senkrechten und wagerechten Kräfte aufzustellen. Wir bezeichnen nun Geschwindigkeit, Auftriebszahl, Anstellwinkel, Luftdichte usf. beim Schweben in Bodennähe mit geringster Geschwindigkeit mit Index 0, Auftriebszahl und Anstellwinkel beim Rollen mit Index 1. Dann ergeben sich für die lotrechten Kräfte die Gleichungen

$$G = \mathfrak{Y}_0 \varrho_0 v_0^2 \qquad (524) \qquad\qquad G = P_{\text{I}} + P_{\text{II}} + \mathfrak{Y}_1 \varrho_0 v^2 \qquad (525)$$

$$P_{\text{I}} + P_{\text{II}} = G\left[1 - \frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0} \cdot \left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right]. \qquad (526)$$

Für die Bewegungsgleichung, aus der die Länge der Anlaufstrecke zu berechnen ist, haben wir nun noch eine Annahme über die Änderung der Schraubenzugkraft mit der Geschwindigkeit zu machen. Diese ist natürlich ausschließlich von der Charakteristik des Propellers abhängig. Das Drehmoment des Motors ist unveränderlich, und die Tourenzahl ändert sich daher umgekehrt proportional der Wurzel aus der Drehmomentenzahl μ_d, die zunächst nur sehr wenig, bei größeren Geschwindigkeiten jedoch stark abnimmt. Zeichnet man dementsprechend den Schub für unveränderliches Drehmoment in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit auf, so ergibt sich etwa eine Parabel mit dem Scheitel auf der Ordinatenachse, und wenn wir wieder mit S_0 die der geringsten Schwebegeschwindigkeit in Bodennähe entsprechenden Schubkräfte bezeichnen, erhalten wir für den Schub in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit die Gleichung:

$$S = S_0\left(1 + k\left[1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right]\right). \qquad (527)$$

Nun haben wir für den Anlauf die Gleichung:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = S - \mathfrak{X}_1 \cdot \varrho_0 v^2 - (P_{\text{I}}\mu_{\text{I}} + P_{\text{II}}\mu_{\text{II}}). \tag{528}$$

Wir dividieren nun durch das Gewicht und erhalten mit der Definition (295) und Gl. (524), (526), wenn, wie aus der Forderung geringer Beträge der Reibung folgt, die Reibungszahlen μ_{I} und μ_{II} gleich sind:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \sigma_0 \left(1 + k\left[1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right]\right) - \frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{Y}_0} \cdot \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - \mu\left[1 - \frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right]. \tag{529}$$

Führen wir nun links das Differential der Anlaufstrecke a_n selbst und der Geschwindigkeitshöhe h Gl. (327) ein:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{2v \frac{dv}{v_0^2}}{v \cdot dt} = h \cdot \frac{d}{da_n}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \tag{530}$$

und trennen rechts nach Veränderlichen und Unveränderlichen;

$$h_0 \cdot \frac{d}{da_n}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \sigma_0(1 + k) - \mu - \left[k\sigma_0 + \frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{Y}_0} - \frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0} \cdot \mu\right]\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \tag{531}$$

so ergibt sich mit den Definitionen:

$$\text{(532)} \quad \mathfrak{A}_0 = \sigma_0(1 + k) - \mu \qquad \mathfrak{B} = k \cdot \sigma_0 + \frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{Y}_0} - \frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0} \cdot \mu \quad \text{(533)}$$

die Anlaufstrecke aus dem Integral:

$$a_n = h_0 \int_{v=0}^{v=v_0} \frac{d\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} = \frac{h_0}{\mathfrak{B}} \cdot \ln \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}.^{1)} \tag{534}$$

Im besonderen ist für $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_0$ mit der Definition (294):

$$\text{(535)} \quad \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{B}_0 = \sigma_0 - \varepsilon_0 \qquad \mathfrak{B}_0 = k \cdot \sigma_0 + \varepsilon_0 - \mu. \quad \text{(536)}$$

In erster Linie ist also die Anlaufstrecke proportional dem Quadrat der zum Schweben in Bodennähe erforderlichen Mindestgeschwindigkeit, d. h. bei gegebenem Größtwert der Zellenauftriebszahl proportional der Flächenbelastung. Es ist selbstverständlich, daß eine Steigerung der Geschwindigkeit über dies Maß eine Verlängerung des Anlaufs mit sich bringt, die sich aber, wie wir oben schon ausführten, nicht rechtfertigen läßt. Der Einfluß aller anderen Größen ist weniger leicht zu überblicken, es läßt sich nur von Fall zu Fall entscheiden, indem man in Gl. (533)

$$\text{(537)} \quad \frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{\beta_1 + \gamma}{\beta_0 + \gamma} \qquad \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{S} + \mathfrak{P} + \mathfrak{J}_0 \cdot \left(\frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0}\right)^2 \quad \text{(538)}$$

---

1) Für die Berechnung mit dem Rechenschieber ist statt des natürlichen der Briggsche Logarithmus einzuführen. Nach der Definition $x = e^{\ln x} = 10^{\lg x}$ ist $\lg x = \lg e \cdot \ln x$, also $\ln x = \lg x / \lg e$. $e = 2{,}718$ $\lg e = 0{,}434$.

einführt, ob eine Verkleinerung des Anstellwinkels beim Anlauf Vorteile mit sich bringt oder nicht. Denn der Luftwiderstand wird natürlich dadurch herabgesetzt, der Rollwiderstand aber erhöht, da die Auftriebskräfte die Stützkräfte nicht so stark erniedrigen, als wenn man mit größtem Anstellwinkel anrollt. Über den Einfluß der anderen Größen kann man sich jedoch ein Bild machen, wenn man den Logarithmus in Gl. (534) in Reihen auflöst:

$$a_n = h_0 \left[\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}}\left(\frac{\mathfrak{B}^2}{2\mathfrak{A}^2} + \frac{\mathfrak{B}^3}{3\mathfrak{A}^3}\cdots\right)\right]. \tag{539}$$

Dann zeigt sich, daß die Anlaufstrecke in erster Linie umgekehrt proportional der Größe $\mathfrak{A}$, Gl. (532) und damit im wesentlichen dem Betrag σ_0 ist. Nun ist der Schub:

$$(540) \qquad S_0 = \frac{L_0}{v_0} \qquad\qquad \sigma_0 = \frac{L_0}{G\cdot v_0} = \frac{75\cdot\eta_s}{v_0}\cdot\frac{N_0}{G} \qquad (541)$$

um so beträchtlicher, je größer die Nutzleistung und je geringer die Geschwindigkeit ist. Die Anlaufstrecke ist also wesentlich der Leistungsbelastung proportional und wächst um so stärker mit dieser, je größer die Geschwindigkeit ist, bis zu der das Flugzeug beschleunigt werden muß. Sie wächst also nahezu mit der dritten Potenz dieser Geschwindigkeit, da sie in erster Linie der Flächenbelastung und damit dem Quadrat dieser Geschwindigkeit proportional erkannt wurde.

Diese Beziehungen gelten streng nur für Windstille. Bei Wind ist die Geschwindigkeit v gegenüber der Luft nach Größe und Richtung von der Geschwindigkeit u gegenüber dem Boden verschieden. Im besonderen gilt bei dem üblichen Start gegen Wind, also ohne Unterschied der Richtung, wenn w m/sk die Windstärke bezeichnet:

$$v = u + w \qquad dv = du \tag{542}$$

und damit ändert sich Gl. (530) wie folgt:

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{1}{g}\cdot\frac{u\,du}{u\,dt} = \frac{(v-w)\cdot dv}{g\cdot da_n} = h_0\cdot\frac{d}{da_n}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - \frac{w}{g}\cdot\frac{dv}{da_n}. \tag{543}$$

Die Anlaufstrecke wird also, wie sich von selbst versteht, bei Gegenwind kleiner; und zwar aus doppelten Gründen: einmal, weil das Integral über Gl. (534) nicht zwischen 0 und v_0 sondern zwischen w und v_0 zu nehmen ist und dann, weil von dem so schon geringeren Wert des Integrals des ersten Gliedes noch das Integral über das zweite Glied abgezogen werden muß. Wir erhalten also statt Gl. (534) für die Anlaufstrecke:

$$a_n = \frac{h_0}{\mathfrak{B}}\cdot\ln\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\left(\frac{w}{v_0}\right)^2}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}} - \frac{w}{g}\cdot\frac{v_0}{2\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}\ln\frac{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}+\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}-\mathfrak{B}}\cdot\frac{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}-\mathfrak{B}\left(\frac{w}{v_0}\right)}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}+\mathfrak{B}\left(\frac{w}{v_0}\right)}. \tag{544}$$

Wir erkennen ohne weiteres, daß der Einfluß der Veränderung der unteren Integralgrenze, da $\mathfrak{A}$ erheblich größer ist als $\mathfrak{B}$, von verschwindender Bedeutung ist, und daß wir völlig genau genug den Unterschied der Anlaufstrecken bei Windstille und bei Gegenwind demnach ausdrücken dürfen mit dem zweiten Glied von Gl. (544):

$$\varDelta a_n = \frac{w}{v_0} \cdot \frac{h_0}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} \cdot \ln \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\frac{w}{v_0} + \left(1 - \frac{w}{v_0}\right)\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\frac{w}{v_0} - \left(1 - \frac{w}{v_0}\right)\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}. \tag{545}$$

Diese Gleichung ist ausschließlich auf ihre Voraussetzung, daß der Start entgegen der Windrichtung ausgeführt wird, eingeschränkt und kann nicht etwa für die Berechnung der Verlängerung des Starts durch Rückenwind dienen, da der Ansatz nicht gültig ist, wenn, wie bei Beginn des Starts mit Rückenwind, die Tragflächen von hinten angeblasen werden.

C. Landung.

1. Abfangen. Nächst dem Anlauf bietet die Landung für den Flugzeugführer die schwerste Aufgabe. Denn das Fliegen selbst erfordert, da der Luftraum nach allen Richtungen freie Bahn bietet, keine besondere Geschicklichkeit, wenn wir von den besonderen Anforderungen des Luftkampfes abgesehen. Zum richtigen Ansetzen und Durchführen der Landung ist jedoch eine Urteilsfähigkeit nötig, in der Abschätzung der Entfernung vom Boden und der Geschwindigkeit des Flugzeugs, die erst durch längere Übung erworben werden kann. Und diese Übung ist es, die in erster Linie die Fliegerschule dem angehenden Flieger zu bieten hat. Die Landung beginnt eigentlich schon mit dem Abstellen des Motors. In dem Augenblick, wo der Führer den Gleitflug ansetzt, muß er den in Aussicht genommenen Landungsplatz bereits scharf ins Auge fassen, denn es genügt nicht, daß man den Platz überhaupt erreicht, d. h. über ihm geringe Flughöhe hat: Das Flugzeug muß an der Platzgrenze wenige Meter über dem Boden ankommen, so daß ihm eine beträchtliche Strecke entgegen der Windrichtung zum Abfangen, Ausschweben, Aufsetzen und Ausrollen zur Verfügung steht (Fig. 45). Die Geschwindigkeit am Ende des Gleitflugs darf natürlich nicht so groß sein, daß das Ausschweben über den Landeplatz hinausführt. Aber nicht nur zu große, sondern auch zu kleine Geschwindigkeiten am Ende des Gleitflugs muß man meiden; denn wenn

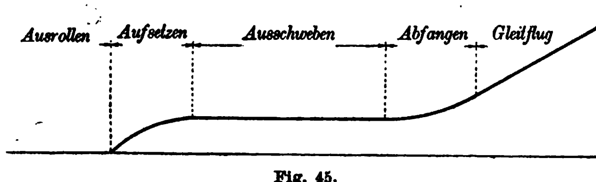


Fig. 45.
Der Verlauf einer Landung.

ich den Gleitflug bereits mit dem größten zulässigen Anstellwinkel mache, so steht mir am Ende des Gleitflugs zum Aufrichten des Flugzeugs keine Zusatzkraft zur Vergrößerung des Auftriebs beim Abfangen zur Verfügung. Eine vorbildliche Landung wird so verlaufen, daß man gegen Schluß des Gleitflugs dem Flugzeug einen großen, aber nicht den größten zulässigen Anstellwinkel gibt, es daher infolge seiner geringen Geschwindigkeit nach dem Abfangen nur kurz ausschwebt bis der größte zulässige Anstellwinkel erreicht ist, aus sehr geringer Höhe aufsetzt und dementsprechend auch nach sehr kurzer Zeit zum Stehen kommt. Denn wenn beim Abfangen die Geschwindigkeit gering ist, so ist auch die zur Flugrichtungsänderung erforderliche Zentripetalkraft, und damit die zusätzliche Belastung der Tragflächen, klein. Für diese Zentripetalkraft gilt:

$$C = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{R} \tag{546}$$

wenn R den Krümmungsradius der Flugbahn bezeichnet. Dieser Krümmungsradius steht nach Gl. (393) zum Abfanggefälle h in der Beziehung:

$$\mathfrak{h} \cong R \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}\,. \tag{547}$$

Und wenn wir noch das Lastvielfache, das die Tragflächen während des Abfangens aufzunehmen haben, mit n bezeichnen, so erhalten wir schließlich:

$$(n-1) \cdot G = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{\mathfrak{h}} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{548}$$

$$\mathfrak{h} = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\varepsilon^2}{(n-1)}\,. \tag{549}$$

Hierin ist $v \cdot \varepsilon$, wie wir schon auf S. 105 ausgeführt haben, die „Sinkgeschwindigkeit" während des Gleitfluges. Und diese wächst schnell mit Verkleinerung des Anstellwinkels; denn wenn, wie gewöhnlich, der größte zulässige Anstellwinkel auch den verhältnismäßig geringsten Widerstand, und damit den geringsten Gleitwinkel, Gl. (360), mit sich bringt, so nimmt mit Verkleinerung von α sowohl v wie auch ε zu. Je steiler also der Gleitflug war, und je kleiner das zur Verfügung stehende Gefälle (d. h. je näher am Boden der Führer abfängt), um so größer ist die Beanspruchung des Fachwerks der Zelle; denn um so größer sind sowohl die zur Richtungsänderung erforderlichen Zentripetalkräfte und in Übereinstimmung hiermit die durch Vergrößerung des Anstellwinkels verfügbaren Auftriebskräfte.

2. Ausschweben. Ist durch das Abfangen die Flugrichtung in die Wagerechte eingedreht, so vermindert sich durch den Luftwiderstand langsam die Geschwindigkeit. Nach dem Abfangen hat also der Führer, um in geringer Höhe über dem Boden zu bleiben, den Anstellwinkel zunächst schnell herabzusetzen und dann in entsprechendem Maß wieder langsam zu vergrößern. Denn keinesfalls soll bei der Landung der Boden

berührt werden, so lange man das Flugzeug eben noch schwebend erhalten kann. Denn wie gesagt, wächst mit der Geschwindigkeit außerordentlich schnell die Heftigkeit der Stöße, denen das Fahrgestell, und damit das Flugzeug, durch Bodenunebenheiten ausgesetzt ist. Zur Berechnung der Strecke, die das Flugzeug während des Ausschwebens zurücklegen muß, bis es die geringste Schwebegewindigkeit erreicht hat, genügen wieder zwei Gleichungen. Aus der Schwebebedingung:

$$G = \mathfrak{Y} \cdot \varrho_0 \cdot v^2 \tag{550}$$

ergibt sich die Beziehung zwischen Anstellwinkel und Geschwindigkeit, deren Einführung in:

$$(551) \quad -\frac{G}{g}\frac{dv}{dt} = \mathfrak{X} \cdot \varrho_0 \cdot v^2 \qquad -\frac{dv}{dt} = \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}} \cdot g \quad (552)$$

ergibt. Führen wir hier wieder nach Gl. (530) den Weg selbst als Abhängige ein, so erhalten wir schließlich mit dem Differential der Gl. (550):

$$(553) \quad v^2 \cdot d\mathfrak{Y} + \mathfrak{Y} 2 v dv = 0 \qquad -v\,dv = \frac{G}{2\varrho_0 \mathfrak{Y}^2}\, d\mathfrak{Y} \quad (554)$$

$$a_s = \frac{G}{2g\varrho_0}\int_{\mathfrak{Y}}^{\mathfrak{Y}_0} \frac{d\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}} = \frac{G}{4g \cdot \varrho_0} \cdot \frac{1}{\mathfrak{S} + \mathfrak{P}} \cdot \ln \frac{\mathfrak{J}_0}{\mathfrak{X}_0} \cdot \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{J}} \cdot \tag{555}$$

3. Aufsetzen. Hat auf diese Weise das Flugzeug die geringste Schwebegeschwindigkeit erreicht, so kommt mit dem weiteren Sinken des Auftriebs die Erdbeschleunigung zur Geltung, und das Flugzeug wird in einer Art Fallparabel „durchsacken" bis es auf den Boden auftrifft und die Auflagerkräfte allmählich das Gewicht aufnehmen. Aus der Nichterfüllung der Schwebedingung, Gl. (524), folgt die Vertikalbeschleunigung, wenn wir für eine erste Näherung die Änderung der Widerstandszahlen durch die Flugrichtungsänderung außer acht lassen:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{dw}{dt} = G - \mathfrak{Y}_0 \varrho_0 v^2, \tag{556}$$

während die wagerechte Verzögerung

$$-\frac{G}{g}\frac{dv}{dt} = \mathfrak{X}_0 \cdot \varrho_0 \cdot v^2 \tag{557}$$

mit Gl. (524):

$$-\frac{1}{g}\frac{dv}{dt} = \frac{\mathfrak{X}_0}{\mathfrak{Y}_0} \cdot \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \varepsilon_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \tag{558}$$

beträgt. Daraus erhalten wir die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit, die uns in Anbetracht der Gl. (556) allein interessiert:

$$t = \frac{v_0 - v}{\varepsilon_0 \cdot g} \cdot \frac{v_0}{v} \cong \frac{v_0 - v}{\varepsilon_0 \cdot g} \tag{559}$$

und wenn wir diese nun in Gl. (556), die sich ebenfalls durch die Näherung $\frac{v}{v_0} \cong 1$ zu

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{v_0^2 - v^2}{v_0^2} \cong 2\,\frac{v_0 - v}{v_0} \qquad (560)$$

vereinfachen läßt, einführen:

$$(561) \qquad \frac{1}{g} \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{2}{v_0} \cdot \varepsilon_0 \cdot g \cdot t \qquad\qquad w = \varepsilon_0 \cdot \frac{g^2 t^2}{v_0} \qquad (562)$$

ergibt sich die lotrechte Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Höhe $\mathfrak{H}$, um die die Maschine durchsackt, durch abermalige Integration:

$$\mathfrak{H} = \int_0^t w \cdot dt = \varepsilon_0 \cdot \frac{g^2 t^3}{3 v_0} = \sqrt{\frac{v_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{w^{\frac{3}{2}}}{3g}. \qquad (563)$$

Nun ist es nicht die lotrechte Geschwindigkeit, mit der das Flugzeug aufsetzt, sondern ihr Quadrat, das die Stärke der damit verbundenen Stöße bestimmt, und man macht dementsprechend Vorschriften über die Größe der vom Fahrgestell zu fordernden Federungsarbeit, indem man diejenige Höhe angibt, für die beim freien Fall des Flugzeugs ohne horizontale Geschwindigkeit der Stoß eben gerade noch elastisch aufgenommen werden soll. Bezeichnen wir diese Höhe mit $\mathfrak{h}$, so entspricht dieser ein Arbeitsvermögen der Fahrgestellabfederung:

$$A = G \cdot \mathfrak{h} = G \cdot \frac{w^2}{2g} \qquad (564)$$

und hieraus ergibt sich als Beziehung zwischen dem „Aufsetzgefälle“ $\mathfrak{H}$ und dem Gefälle $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{H} = \frac{\sqrt[4]{8}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{g}} \cdot \sqrt{\frac{v_0}{\varepsilon_0}} \cdot \mathfrak{h}^{\frac{3}{4}} = 0{,}317 \sqrt{\frac{v_0}{\varepsilon_0}} \cdot \sqrt[4]{\mathfrak{h}^3}. \qquad (565)$$

Läßt der Führer das Flugzeug aus größerer Höhe als dem hier angegebenen Wert $\mathfrak{H}$ am Ende des Ausschwebens fallen, so wird der Stoß nicht mehr rein elastisch durch die Federung übernommen, sondern zum Teil hart auf die Fahrgestellverstrebung und die damit in Verbindung stehenden Fachwerksteile übertragen. Um nun konstruktiv das Arbeitsvermögen des Fahrgestells zu berechnen, wollen wir annehmen, daß im ruhigen Stand eine meßbare Durchbiegung der Fahrgestellabfederung gerade eben noch nicht stattfindet; daß also die Montierungsspannungen so groß sind, das Gewicht des Flugzeugs gerade eben aufzunehmen. Bezeichnen wir diese Spannung, die natürlich auf beliebig viele Organe verteilt werden kann, mit P_0 und bei größter Durchbiegung mit P, und die diesen Spannungen proportionalen Durchbiegungen mit f_0 bzw. f, so ist die verfügbare Federungsarbeit, die dem mit Gl (564) geforderten Arbeitsvermögen A gleich sein soll:

$$A = \frac{P \cdot f}{2} - \frac{P_0 f_0}{2}. \qquad (566)$$

Die Arbeit $P_0 \cdot \frac{f_0}{2}$ ist beim Einbau der elastischen Organe vom Arbeiter zu leisten. Da wir annehmen, daß

$$P_0 = G \qquad (567)$$

also die Durchbiegung f_0 von vornherein vorhanden ist, bedeutet:

$$f_1 = f - f_0 \qquad (568)$$

die wahrnehmbare Durchbiegung, die natürlich auch einen bestimmten Betrag nicht überschreiten darf. Da diese Hubbegrenzung wesentlich die Abmessungen des Fahrgestells bestimmt, und außerdem ein bestimmtes Arbeitsvermögen A gefordert wird, ergeben sich die Dimensionen der elastischen Organe

$$\frac{P_0}{f_0} = \frac{G}{f_0} \qquad (569)$$

aus diesen Beziehungen unter der Voraussetzung der Proportionalität der Federkraft P mit dem Federweg f mit den Gl. (564) und (566) bis (568):

$$A = \mathfrak{h} \cdot G = \frac{P_0}{2 f_0}(f^2 - f_0^2) = \frac{G}{2 f_0} \cdot f_1 \cdot (f_1 + 2 f_0) \qquad (570)$$

$$f_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_1^2}{\mathfrak{h} - f_1}. \qquad (571)$$

4. Ausrollen. Sobald das Flugzeug den Boden berührt hat, wird es nicht nur durch den Luftwiderstand, sondern auch durch die Reibung verzögert, die die mit wachsendem Auflagedruck den Boden berührenden Stützpunkte erfahren. Ja, man wird sogar diese Reibung durch Anordnung von Bremsen oder gar Hemmschuhen (Kufen) möglichst stark erhöhen, um nicht einen Auslauf von einigen hundert Metern, der über die Grenze des Flugplatzes hinausführen könnte, zu erhalten. Natürlich gilt auch für den Auslauf die Momentengleichung, die wir in Anlehnung an Fig. 44 mit Gl. (523) für den Anlauf aufgestellt hatten für den Fall, daß das Moment der Luftkräfte und der Schraube in bezug auf den Schwerpunkt verschwindet. Da dies zumal bei indifferentem Gleichgewicht, bei abgestelltem Motor selbst für exzentrische Schublage, der Fall ist, hat hier Gl. (523) fast strenge Gültigkeit. Neben der Momentengleichung haben wir nun noch die Gleichung der senkrechten Kräfte

$$G = P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} + \mathfrak{Y}_1 \varrho_0 v^2 \qquad (572)$$

und die Gleichung der wagerechten Kräfte

$$-\frac{G}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \mathfrak{X}_1 \cdot \varrho_0 \cdot v^2 + P_{\mathrm{I}} \mu_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} \mu_{\mathrm{II}} \qquad (573)$$

für die eigentliche Bewegungsgleichung anzuschreiben. Aus der Einführung von Gl. (523) und (572) in Gl. (573) ergibt sich mit der Definition:

$$\mathfrak{E} = \frac{\mu_I d_{II} + \mu_{II} \cdot d_I}{d_I + d_{II} + c(\mu_{II} - \mu_I)} \tag{574}$$

$$-\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{\mathfrak{X}_1}{\mathfrak{Y}_0} \cdot \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \mathfrak{E}\left[1 - \frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\right] \tag{575}$$

und wenn wir hier wieder statt der Zeit den Weg einführen, erhalten wir für die Auslaufstrecke:

$$-\frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{d}{da_u}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \mathfrak{E} + (\varepsilon_1 - \mathfrak{E})\frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \tag{576}$$

$$a_u = -h_0 \int\limits_{v=v_0}^{v=0} \frac{d\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}{\mathfrak{E} + (\varepsilon_1 - \mathfrak{E})\frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} = -\frac{h_0}{\mathfrak{E} - \varepsilon_1} \cdot \frac{\mathfrak{Y}_0}{\mathfrak{Y}_1} \ln\left(1 - \frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0} + \frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{E}}\right) \cdot \tag{577}$$

Die Formel ergibt bei $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_0$ für $\mathfrak{E} = \varepsilon_1$ einen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$, der nach Differentiation von Nenner und Zähler bestimmt wird zu:

$$a_u = \frac{h_0}{\mathfrak{E}} = \frac{h_0}{\varepsilon_1} . \tag{578}$$

In diesem Fall ergeben sich also unzulässig große Auslaufstrecken. In der Tat ist aber bei gleicher Reibungszahl der Stützpunkte $\mathfrak{E}$ gleich dieser Reibungszahl selbst und damit wirklich in der Größe von ε. Man sieht sich also gezwungen, zur Verkürzung der Anlaufstrecke $\mathfrak{E}$ einen wesentlich größeren Betrag zu geben.

Diesem Zwecke dienen Verkleinerung des Nenners und Vergrößerung des Zählers. Es ist ersichtlich der Verkürzung des Auslaufs zuträglicher, die Reibung des Stützpunktes bzw. der Stützpunkte, die *vor* dem Schwerpunkt liegen, durch Bremsung zu erhöhen — denn dadurch wird das dritte Glied des Nenners negativ —, als die *hinter* dem Schwerpunkt liegenden Stützpunkte abzubremsen. Es ist also die übliche Anordnung einer Kufe hinter den Laufrädern als drittem Stützpunkt nicht sehr vorteilhaft, selbst wenn zur Vergrößerung des Nenners von $\mathfrak{E}$ der Abstand d_I des Schwerpunkts hinter der Laufradachse sehr groß gemacht wird. Das beruht darauf, daß die Kufe durch das negative Moment der an ihr wirksamen Reibungskraft sich selbst um so mehr entlastet, je stärker eben diese Kraft ist. Das Umgekehrte tritt natürlich ein, wenn der dritte Stützpunkt und damit auch der Schwerpunkt vor der Laufradachse liegt. Dann bewirkt eine Vergrößerung der Reibung an diesem eine Erhöhung seines Auflagerdrucks usf. Es kann also leicht vorkommen, daß dieser dritte Stützpunkt, wenn seine Auflagerfläche zu klein ist, sich in weichem Landungsgelände am Boden festfrißt, und damit die Maschine zu Bruch kommt. Bei einer derartigen Anordnung ist also sorgfältig abzuwägen, wie weit der Schwerpunkt vor die Laufradachse gelegt werden darf, und wie weit er vor

diese gelegt werden muß, damit Stöße am Stoßrad nicht das Flugzeug nach hinten kippen. In jedem Fall wäre es vorteilhaft, die hochbelasteten Laufräder selbst abzubremsen. Das ist aber, wie wir oben ausführten, nur dann zulässig, wenn durch eine Vorrichtung die Bremswirkung für beide Räder geregelt und dadurch unerwünschte Schwenkungen vermieden werden können.

Liegen die Stützpunkte so, daß das Flugzeug mit dem größten zulässigen Anstellwinkel ausrollt, so ist das aus dem Grund günstig, weil es ja am Ende des Ausschwebens diesen Anstellwinkel inne hat und damit beim Aufsetzen ein gleichzeitiges Auftreffen aller drei Stützpunkte auf den Boden gesichert ist; dadurch werden wenigstens von vornherein Drehungen des Flugzeugs um die Querachse vermieden. Denn wird durch eine schlechte Landung die Elastizität der Stützpunkte stark in Anspruch genommen, so springt das Flugzeug nach dem Aufsetzen, und die mit Drehungen um die Querachse verbundenen Anstellwinkeländerungen sind je nach der Lage der Stützpunkte zueinander imstande, dieses Springen in verhängnisvollem Maße zu unterstützen.

Aber es ist offenbar selbst bei vollkommen gleichzeitigen Auftreffen der Stützpunkte, geradezu Zufall, wenn die Reibungsverhältnisse der Stützpunkte eine der Härte ihrer Federung proportionale Belastung herbeiführen und damit Drehungen wirklich vollkommen vermieden werden. Ohne Steuerbetätigung wird der Führer beim Ausrollen also überhaupt nur ausnahmsweise auskommen. Es ist daher nicht unbedingt erforderlich tatsächlich die Stützpunkte so anzuordnen, daß sie beim Aufsetzen mit größtem zulässigen Anstellwinkel gleichzeitig den Boden berühren. Ja, in Rücksicht auf die Auslaufstrecke ist es sogar je nach den Verhältnissen von Luft- und Reibungswiderständen mehr oder weniger vorteilhaft, den Anstellwinkel beim Ausrollen kleiner zu wählen. Denn damit wird zwar der induzierte Widerstand kleiner; aber die Reibungskräfte werden natürlich um so bedeutender, d. h. die Bremsung um so wirksamer, je weniger der Auflagedruck durch den Auftrieb herabgesetzt wird.

In gleicher Weise wie oben beim Start haben wir wieder in Betracht zu ziehen, welche Verkürzung die Auslaufstrecke durch Gegenwind erfährt, da man eben in Rücksicht auf diese Verkürzungen der Laufstrecken, und um die Kippgefahr bei Seitenwind zu vermeiden, grundsätzlich gegen den Wind rollt. Auch hier ist wieder, wie oben, die Verkleinerung infolge der Veränderung der unteren Grenzen des Integrals verschwindend geringfügig gegenüber der Herabsetzung der Anlaufstrecke durch das Hinzukommen des negativen Gliedes. Wie sich aus dem Vergleich der Gl. (534) und (577) ergibt, folgt aus Gl. (545) mit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \qquad \mathfrak{B} = (\mathfrak{C} - \varepsilon_1)\,\frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0} \tag{579}$$

die Verkürzung der Auslaufstrecke.

IX. Muster einer Flugzeugberechnung.

A. Aufgabe.

Es ist ein Verkehrsflugzeug für Beförderung von höchstens 12 Personen mit Handgepäck für 7 Stunden Flugdauer zu entwerfen. Die voraussichtliche Reisehöhe von etwa 2000 m soll mit Vollast in höchstens 20 Minuten erreicht werden und die mittlere Eigengeschwindigkeit in dieser Höhe soll nicht unter 125 km/st. liegen. In Rücksicht auf ungünstige Wetterlagen muß das Flugzeug mindestens 4000 m erreichen können. Der Rollweg bei Anlauf und Auslauf soll nicht über 200 m betragen. Die Torbreite der verfügbaren Flugzeughallen verbietet eine Spannweite von 25 m zu überschreiten.

B. Lösung.

1. Die Berechnung der erforderlichen Motorleistung.

Die Beschränkung den Steigfähigkeit auf eine Gipfelhöhe von $H_g = 4$ km und eine Steigzeit von 20 Minuten bis $H = 2$ km läßt uns unter der Voraussetzung, daß nur leicht überbemessene Motoren mit einer Gleichleistungsgrenze von etwa $H_L = 2$ km in Frage kommen, aus den Gl. (156), (157) die größte zulässige Leistungsbelastung bestimmen. Denn nach der Steigzeitentabelle (S. 44) ist für $H_g = 4$, $H_L = 2$, $H = 2$:

$$\tau_2 = k \cdot 6{,}1. \tag{B 1}$$

Wenn wir annehmen, daß der mittlere Schraubenwirkungsgrad während des Steigens vom Boden bis zu 2000 m Höhe nicht unter etwa 60 % bleibt, wird nach Gl. (157):

$$k = \frac{G}{N_0} \cdot \frac{1}{4{,}5 \cdot 0{,}60} \,. \tag{B 2}$$

Daraus ergibt sich, da $\tau_2 = 20$ min gefordert wird:

$$\frac{G}{N_0} = \frac{20}{6{,}1} \cdot 4{,}5 \cdot 0{,}60 = 8{,}9 \text{ kg/P. S.} \tag{B 3}$$

Nun setzt sich nach Gl. (115) das Flugzeuggewicht aus drei Teilen zusammen: der Nutzlast, einem der Motorleistung allein und einem der Motorleistung und der Flugdauer proportionalen Anteil. Der der Motorleistung proportionale Gewichtsanteil beträgt erfahrungsgemäß etwa 4,5 kg/P.S. Die geforderte Nutzlast beträgt rd. 1000 kg, wenn wir mit 10 bis 20 kg Handgepäck für jeden Fluggast rechnen. Der Verbrauch an Benzin und Öl für die Pferdestärke und Stunde, einschließlich eines Zuschlags von 10% für die Behälter, ist etwa 0,26 kg. Damit folgt aus

Gl. (115) und (B 3) für Startgewicht mit vollen Tanks für 7 Stunden Flugdauer:

$$\frac{G}{N_0} = \frac{1000}{N_0} + 4{,}5 + 0{,}26 \cdot 7 = 8{,}9. \qquad N_0 = \frac{1000}{8{,}9 - 6{,}32} = 388 \text{ P.S.} \quad \text{(B 4)}$$

$$G = 388 \cdot 8{,}9 = 3450 \text{ kg.} \quad \text{(B 5)}$$

Diese Werte sind wesentlich nur der Größenordnung nach gültig. Denn eine Änderung in der Voraussetzung über die Leergewichtsleistungsbelastung 4,5 kg/m² hat auf sie bedeutenden Einfluß. Es ist auch nach früheren Rechnungen ähnlicher Art wahrscheinlich, daß die hohen Anforderungen an die Start- und Landungsfähigkeit (kurzer An- und Auslauf) nur eine geringere Flächenbelastung zulassen, als in der Aufgabe mit der Gipfelhöhe gefordert wird. Mit Vergrößerung der Gipfelhöhe gehen aber die Steigzeiten ganz erheblich zurück, bzw. lassen gegebene Steigzeiten bedeutend größere Leistungsbelastungen zu. Wir werden also zuerst versuchen, keinesfalls mit einer höheren als der eben angegebenen Leistung zu rechnen. Denn vor allem müssen wir in Rücksicht auf die Wirtschaftlichkeit des Flugzeugs als Verkehrsmittel versuchen, mit einer möglichst kleinen Leistung auszukommen und erst, wenn diese Leistung sich als unzulänglich erweist, zur nächst größeren zur Verfügung stehenden Leistungsgruppe übergehen. Dann erhalten wir bei möglichst starker Unterteilung der Leistung, die ja in Rücksicht auf Schraubenwirkungsgrad und Betriebssicherheit (S. 40) erwünscht ist, vier bzw. drei gleich starke Motoren von weniger als 100 bzw. 130 P. S. Motoren dieser Leistung sind nicht greifbar. Bei Unterteilung der Leistung auf zwei Motoren steht, der Größenordnung nach hinreichend geeignet, ein Motor von 175 P. S. Nennleistung zur Verfügung. Gemessene Leistung und Brennstoffverbrauch ist in:

H km	N P. S.	q_0 kg/P. S. st	$q_0 N$ kg/st
0	193	0,219	42,3
2	163	0,228	37,0
4	135	0,234	31,6
6	106	0,258	27,4

Wenn wir also, um die Leistungsveränderungen mit der Höhe eindeutig und einfach zu kennzeichnen, weiterhin voraussetzen, daß der Motor eine Gleichleistungsgrenze von $H_L = 2$ km besitzt und zwischen Boden und 2000 m Höhe unveränderlich 175 P. S. leistet, so ist das bei der dem Motor eigentümlichen Art der Leistungsregelung für geringe Höhen eine recht rohe Charakteristik, während das Verhalten des Motors in größeren Höhen dadurch mit ausgezeichneter Genauigkeit wiedergegeben wird. Wir werden darauf gelegentlich der Berechnung der Flugleistungen zurückkommen.

2. Schätzung des Gesamtgewichts.

Wir haben nun, um die Flügeltiefen und danach die Flugleistungen zu berechnen, eine Schätzung des Gesamtgewichts vorzunehmen, die ja nunmehr, da die Motoren, wenn auch vielleicht zunächst nur vorläufig, gewählt sind, rein konstruktiv möglich ist. Die Motoren wiegen nackt 640 kg und fordern je 20 Liter Kühlwasser. Ausreichende Kühler erhält man mit einem Einheitsgewicht von rd. 0,15 kg/P. S. Das Gewicht der meist jugendlichen Führer ist mit 65 kg einschließlich leichter Kleidung sicher nicht unterschätzt. Die größte Unsicherheit birgt in Anbetracht der völlig neuen Anforderungen gegenüber dem Kriegsflugzeug die Abschätzung des Rumpfgewichts. Wir haben hier, um rechnerisch sicher zu gehen, sehr hoch gegriffen. Damit folgt die „Last" (Gesamtgewicht ausschließlich Flügelgewicht) zu:

Rumpf, Motorboote und Fahrgestell	650 kg	Übertrag	1430 kg
Motoren	640 „	Führer	65 „
Kühlwasser	40 „	Betriebsstoffbehälter	55 „
Kühler	50 „	Brennstoff für 7 Std. ($H = 2$ km)	520 „
Auspufftöpfe	10 „	Öl für 7 Stunden	30 „
Luftschrauben	40 „	Nutzlast	1000 „
		Zusammen	3100 kg

Nehmen wir nun an, daß wir konstruktiv mit einem Flügeleinheitsgewicht von einem Achtel der Flächenbelastung auskommen, so hätten wir die Last um ein Siebentel zu vergrößern, um das Gesamtgewicht zu erhalten. Dann haben wir noch einen weiteren Zuschlag zu machen für das Gewicht der Steuer, das wir ausreichend berücksichtigen, wenn wir annehmen, daß Höhen- und Seitensteuer zusammen bei gleichem Flügeleinheitsgewicht etwa ein Zehntel des Flächeninhalts der Zelle aufweisen. Denn da das Flächeneinheitsgewicht der Steuer in Anbetracht ihrer geringen statischen Beanspruchung gewöhnlich kleiner gehalten werden kann als das der hoch beanspruchten Flügel, wird also mit unserer Annahme auch gegebenenfalls einem größeren Ausmaß der Steuer Rechnung getragen. Wir haben also das tabellarisch berechnete Gewicht der Last im Verhältnis 8,1 : 7 zu vergrößern, um das Gesamtgewicht des vollbeladenen Flugzeugs zu erhalten. Dies ergibt sich damit zu $3580 \simeq 3600$ kg. Ob Zelle und Steuer mit $3600 - 3100 = 500$ kg richtig eingeschätzt sind, wollen wir auch nach den weiteren Berechnungen in Anbetracht der Unsicherheit der Schätzung für Rumpf und Fahrgestell unerörtert lassen.

3. Die vorläufige Berechnung von Auftrieb und Widerstand.

Daß wir wenigstens einem Flügel die in Rücksicht auf die Unterbringung begrenzte größte Spannweite von 25 m geben, versteht sich in

Rücksicht auf den induzierten Widerstand von selbst. Wir werden jedoch nicht nur einem, sondern allen Flügeln die größte zulässige Spannweite geben. Denn wenn auch seitliche Staffelung die Einflußzahl Gl. (44) stark herabsetzt, so erhöht doch die kleinere mittlere Spannweite im Nenner von Gl. (49) den Widerstand ungleich stärker. Hiervon kann man sich leicht überzeugen, wenn man Gl. (49) mit (50) und (44) nach b ableitet und mit der Ableitung endliche Differenzen $\Delta \mathfrak{J} = \frac{d\mathfrak{J}}{db} \cdot \Delta b = \frac{d\mathfrak{J}}{db} \cdot 2c$ berechnet.

Setzen wir in Rücksicht auf die hohe Leistungsbelastung, um keinen allzu langen Anlauf zu erhalten, als Grenzwert der Flächenbelastung 40 kg/m² voraus, so ergibt sich ein Flächeninhalt der Zelle von 90 m² und bei Ausführung als Doppeldecker von 25 m Spannweite 1,8 m mittlere Flügeltiefe. In dieser Größenordnung muß also, um den induzierten Widerstand nicht allzusehr zu steigern, auch der Flächenabstand liegen. Tatsächlich erhalten wir aus einer vorläufigen Abschätzung im Entwurf einen Flächenabstand von etwa 1,7 m. Aus dem Verhältnis von Spannweite zu Bauhöhe folgt nach Gl. (44) die Einflußzahl des induzierten Widerstandes

$$\nu_0 = \nu = \ln \frac{25}{1{,}7} = 2{,}68. \qquad \text{(B 6)}$$

Wir sehen aus Fig. 6, daß die Einflußzahl demjenigen Wert Gl. (51) außerordentlich nahesteht, oberhalb dessen der Zweidecker auch ärodynamisch günstiger wird als der Dreidecker. Es läßt sich also in Anbetracht des durchaus geringfügigen Unterschiedes der induzierten Widerstände

$$\mathfrak{r}_{II} = 0{,}834 \qquad \mathfrak{r}_{III} = 0{,}829 \qquad \text{(B 7)}$$

der zudem in der Größenordnung der Fehler der Näherungsgleichung liegt, keineswegs rechtfertigen, das Flugzeug als Dreidecker auszuführen. Nehmen wir als größte zulässige Auftriebszahl $\eta_{max} = 0{,}5$ an, so erhalten wir bei einem Flächeninhalt der Zelle von 90 m² einen Größtwert (Index $*$) für den Auftrieb nach Gl. (42):

$$\mathfrak{Y}_* = 0{,}5 \cdot 90 = 45 \qquad \text{(B 8)}$$

und dementsprechend aus Gl. (49) für den induzierten Widerstand des Zweideckers in erster Näherung:

$$\mathfrak{J}_* = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{45}{25}\right)^2 \cdot 0{,}834 = 1{,}72. \qquad \text{(B 9)}$$

Nehmen wir nach Fig. 7 als Mittelwert der Profilwiderstandszahl für $\eta = 0{,}25$ bis $0{,}5$, für die Zelle $\psi = 0{,}009$ an, so ergibt sich für den Profilwiderstand nach Gl. (55):

$$P = 0{,}009 \cdot 90 = 0{,}81. \qquad \text{(B 10)}$$

Als Voraussetzung für die Berechnung der Flügeltiefen benötigen wir nur noch Annahmen über die Größe der schädlichen Widerstände. Nehmen wir an, daß die Karosserie $1^1/_2$ m breit ist, die Blattspitzen der Luftschrauben in mindestens 25 cm Abstand von der Karosserie vorbeigeführt werden müssen und die Schraube keinesfalls über $1^1/_2$ m Halbmesser bekommt, so ergibt sich ein Abstand der Motorachsen von der Symmetrieebene von 2,50 m. Beide Tragflügel mögen bei gleicher Spannweite 1,25 m über die letzte Strebenebene hinauskragen, um das äußerste Feld des Fachwerks zu entlasten. Dann hat das Fachwerk zwischen Motor und äußerster Strebe noch eine Breite von

$$12{,}5 - 2{,}5 - 1{,}25 = 8{,}75 \text{ m},$$

die in etwa drei Felder von verschiedener, nach außen zunehmender Spannweite zu unterteilen ist. Nehmen wir an, daß diese Spannweiten sich wie rd. 4 : 5 : 6 verhalten mögen, so erhalten wir dafür 2,35 m, 2,90 m, 3,50 m absolute Größe. Hiermit können wir die Längen von Streben und Kabeln bestimmen, um unter der Voraussetzung einer mittleren Stärke derselben ihren Beitrag zum schädlichen Widerstand zu berechnen (s. Aufriß in Fig. 47).

Damit erhalten wir den schädlichen Widerstand unter Ausschluß des Widerstands der Steuer gemäß Gl. (54) aus folgender Tabelle:

Teil	Anzahl	Länge bzw. Höhe	Breite	Fläche $\mathfrak{Q}$	Widerstandszahl ξ	$\xi\mathfrak{Q}$
Streben	16	1,7	0,04	0,09	0,06	0,055
Kabel	—	135,0 [1]	0,005	0,675	0,50	0,35
Räder	3	0,965	0,15	0,44	0,40	0,175
Fahrgestellstreben	—	11,0	0,05	0,55	0,20	0,11
Rumpf	1	1,50	1,5	2,25	0,10	0,23
Boote	2	1,80	0,8	1,60	0,15	0,24
Kühler	2	—	—	—	—	0,09
					Summe	1,250

1) Einschließlich der Tiefenkreuze.

Der Widerstand günstiger Kühler ist nach Göttinger Messungen (T. B. II S. 4) ziemlich unabhängig von ihrem Vorderriß $\Delta\mathfrak{S} = \frac{0{,}25 \text{ m}^2}{1000}$ /P. S. Wir haben dementsprechend ohne Angabe von Breite und Höhe den Widerstand der beiden Kühler in der Tabelle angeführt. Zu diesem Widerstand haben wir nun den Widerstand des Höhensteuers hinzuzurechnen. Dessen Größe folgt vorläufig aus Gl. (210), wenn wir das in

Fig. 2 dargestellte Profil, das besonders geringe Anforderungen hinsichtlich des Momentenausgleichs stellt, für die Flügel verwenden, zu:

$$F_F = \frac{0{,}04}{0{,}25} \cdot \frac{1{,}8}{5} \cdot 90 = 5{,}2 \text{ m}^2. \tag{B 11}$$

Geben wir dem Höhensteuer in Rücksicht auf die dynamischen Beanspruchungen die doppelte Größe und ordnen es in dem angenommenen Abstand von 5 m hinter dem Schwerpunkt, so können wir annehmen, daß der Auftrieb des Steuers verschwindet, sobald der Auftrieb der Zelle seinen Größtwert erreicht. So kommt für den Widerstand des Steuers allein sein Profilwiderstand in Frage. Geben wir dem Steuer wieder das in Fig. 2 dargestellte Profil, so erhalten wir als Profilwiderstandszahl für verschwindenden Auftrieb aus Fig. 7 $\psi = 0{,}025$ und damit den schädlichen Widerstand des Steuers zu:

$$\varDelta\mathfrak{S} = 0{,}025 \cdot 10 = 0{,}25.$$

Machen wir nun für das Seitensteuer, das ohne wesentlichen Eigenwiderstand hinten am Rumpf angeschlossen sein möge, und für die Beschläge, Spannschlösser usf. einen Zuschlag gleicher Größe, so ergibt sich schließlich für den schädlichen Widerstand endgültig:

$$\mathfrak{S} = 1{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 = 1{,}75. \tag{B 12}$$

Danach haben wir also zunächst der Berechnung der Flügentiefen folgende Werte zugrunde zu legen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= 1{,}75 \\ \mathfrak{P} &= 0{,}81 \\ \hline \mathfrak{S} + \mathfrak{P} &= 2{,}56 \\ \mathfrak{J}_* &= 1{,}72 \\ \hline \mathfrak{S} + \mathfrak{P} + \mathfrak{J}_* = \mathfrak{X}_* &= 4{,}28 \\ \mathfrak{Y}_* &= 45{,}0 \\ \mathfrak{X}_* : \mathfrak{Y}_* &= 0{,}0951. \end{aligned} \tag{B 13}$$

4. Die Berechnung der Flügeltiefen.

Wir haben oben zur Berechnung des Gewichts der Zelle angenommen, daß das Flügeleinheitsgewicht ein Achtel der Flächenbelastung betrage, und da wir zur vorläufigen Berechnung des Flächeninhalts der Zelle und damit des Profilwiderstands eine Flächenbelastung von 40 kg/m² vorausgesetzt haben, so hätten wir für die Berechnung der Flügeltiefen nun mit einem Flügeleinheitsgewicht von 5,0 kg/m² zu rechnen. Erfahrungsgemäß können wir aber voraussichtlich ein Flügeleinheitsgewicht von 4,5 kg/m² erreichen. Im Interesse der Startfähigkeit wollen wir die letzte Annahme für die Berechnung der Flügeltiefen bevorzugen, da sich rechnerisch eine um so größere Zelle ergibt, je geringer das Flügelein-

heitsgewicht angenommen wird. Auf Grund früherer Rechnungen müssen wir freilich auch dann noch eine Start und Landung nachteilig hohe Flächenbelastung erwarten, wenn wir für die Gipfelhöhe lediglich das geforderte Mindestmaß von 4 km annehmen. Wir wollen daher, um die Rechnung nicht unnötigerweise wiederholen zu müssen, von vornherein die Gipfelhöhe auf $H_g = 5$ km festsetzen und nur dann mit diesem Maß heruntergehen, wenn der Start unter dieser Voraussetzung kürzer werden sollte, als die Aufgabe fordert. Größte Geschwindigkeit in der voraussichtlichen Flughöhe erreichen wir bei der notwendigen Beeinträchtigung, die in dieser Hinsicht die Rücksicht auf den Start mit sich bringt, wenn wir nun die Flügeltiefen für größte Geschwindigkeit in der Gipfelhöhe berechnen. Denn diejenige Höhe, für die Maximalgeschwindigkeit gefordert wird, ist nach den Voraussetzungen der Maximumsbedingung zugleich Gipfelhöhe. Wir entnehmen Fig. 12 für $H_L = 2$, $H = 5$, $\lambda = 0{,}685$. Damit erhalten wir nach Gl. (58) für die Nutzleistung in der Gipfelhöhe, wenn man für diese in Anbetracht der geringen Geschwindigkeit einen Wirkungsgrad der Schrauben von nur 65% annimmt:

$$L = 75 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}685 \cdot 2 \cdot 175 = 11660 \text{ kg m sk}^{-1}. \qquad \text{(B 14)}$$

Für $H = 5$ ist ferner nach Fig. 11 $\varepsilon = 0{,}585$. Nun ist für die, oben gelegentlich Ableitung von Gl. (130) genannte, mittlere Temperatur für Mitteleuropa von $+ 10{,}5^0$ in Bodennähe bei einem auf Meereshöhe bezogenen Barometerstand von 762 mm Quecksilbersäule:

$$\varrho_0 = 0{,}125 \text{ kg m}^{-4} \text{ sk}^2 \text{ [1]}$$

und damit für $H = 5$:

$$\varrho = 0{,}585 \cdot 0{,}125 = 0{,}732 \text{ kg m}^{-4} \text{ sk}^2. \qquad \text{(B 15)}$$

Mit diesen und den vorgenannten Beträgen $\psi_1 = \psi_2 = 0{,}009$ und $q_1 = q_2 = 4{,}5$ kg m^{-2} sind bis auf η_1 und η_2 alle in Gl. (112) genannten Werte bekannt. Für statische Rechnungen nimmt man gewöhnlich an, daß sich beim Doppeldecker die Belastungen von Oberdeck und Unterdeck wie 11 : 9 verhalten. Das folgt auch im wesentlichen aus der Steigerung der Strömungsgeschwindigkeit ums Oberdeck und der Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit ums Unterdeck infolge der gegenseitigen Beeinflussung der Tragflügel. Wir setzen also für die Gl. (112) voraus, daß den für Gl. (B 8) angenommenen Größenwerten $\eta_I = \eta_{II} = 0{,}50$ Werte $\eta_1 = 0{,}55$ und $\eta_2 = 0{,}45$ entsprechen.

---

1) Mit andern Annahmen für ϱ_0 kann man klimatische und Tageseinflüsse hinreichend genau berücksichtigen, da das Temperaturgefälle von $0{,}57^0$ auf 100 m, das der Berechnung der Funktion ε zugrunde gelegt wurde, bei gewöhnlicher Wetterlage wesentlich für alle Breiten und Jahreszeiten zutrifft (Fig. 29 in Lit. 43).

Nunmehr liefert Gl. (112):

$$\varphi_1 = x \cdot 25 \cdot x \cdot \left(0{,}0951 - \frac{4{,}28}{3600} \cdot \frac{4{,}5}{0{,}55} - \frac{0{,}009}{0{,}45}\right) = 5{,}41 \cdot x \qquad \text{(B 16)}$$

$$\varphi_1 = x \cdot 25 \cdot x \cdot \left(0{,}0951 - \frac{4{,}28}{3600} \cdot \frac{4{,}5}{0{,}45} - \frac{0{,}009}{0{,}55}\right) = 4{,}96 \cdot x \qquad \text{(B 17)}$$

und damit Gl. (108):

$$\eta_1 \cdot t_1 = \frac{21{,}6 - 13{,}3}{16 - 7{,}2} \cdot x = 0{,}943\, x \qquad \text{(B 18)}$$

$$\eta_2 \cdot t_2 = \frac{19{,}8 - 14{,}5}{16 - 7{,}2} \cdot x = 0{,}602\, x. \qquad \text{(B 19)}$$

Nach Gl. (42) ist:

$$\mathfrak{Y}_* = 25 \cdot (0{,}943 + 0{,}602) \cdot x = 38{,}6 \cdot x \qquad \text{(B 20)}$$

und nach Gl. (27):

$$\mathfrak{J}_* = \frac{x^2}{\pi} \cdot [2 \cdot (0{,}89 + 0{,}363) + 1{,}52] = 1{,}28 \cdot x^2. \qquad \text{(B 21)}$$

Damit lautet Gl. (114):

$$1 + \frac{1{,}28}{2{,}56} \cdot x^2 = \frac{0{,}271}{2{,}56} \cdot \frac{11660}{21600} \cdot 240 \cdot x^{\frac{3}{2}} \qquad \text{(B 22)}$$

$$1 + 0{,}50\, x^2 = 1{,}37\, x^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{array}{ll} x = 1 & 1{,}50 > 1{,}37 \\ x = 1{,}1 & 1{,}61 > 1{,}59 \\ x = 1{,}12 & 1{,}63 = 1{,}63\,. \end{array} \qquad \text{(B 23)}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{array}{lll} \eta_1 t_1 = 1{,}055 & \eta_2 t_2 = 0{,}875 & \mathfrak{Y}_* = 43{,}2 \\ \mathfrak{J}_* = 1{,}61 & \mathfrak{X}_* = 4{,}17 & \mathfrak{X}_* : \mathfrak{Y}_* = 0{,}0968. \end{array} \qquad \text{(B 24)}$$

Um mit Gl. (110) hieraus die Flügeltiefen zu bestimmen, benötigen wir für die Gl. (39), (40) den Wert der Einflußzahl μ, die nach Gl. (37) für verschwindende Staffelung nach vorn ($a = o$) und der Seite ($c = 0$), bei großen Spannweiten ($b \gg d$) $\mu = \frac{b}{d} - 1$ beträgt.[1])

$$\frac{\eta_I}{\eta_1} = 1 - \frac{\eta_2 t_2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) = 0{,}883 \qquad \text{(B 25)}$$

$$\frac{\eta_{II}}{\eta_2} = 1 + \frac{\eta_1 t_1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) = 1{,}227 \qquad \text{(B 26)}$$

$$\eta_1 = 0{,}567 \qquad \eta_2 = 0{,}408 \qquad t_1 = 1{,}86 \qquad t_2 = 1{,}65. \qquad \text{(B 27)}$$

1) Sollte sich bei der konstruktiven Durcharbeitung des Entwurfs eine endliche Staffelung nach vorn als notwendig erweisen, so ändert sich die Einflußzahl μ nur in so untergeordnetem Maße, daß eine Wiederholung des Rechnungvorgangs vollkommen überflüssig ist.

Die Abweichung von unserer Voraussetzung, daß wir für die Flügeltiefen im Mittel 1, 8 m erhalten würden, ist also so unwesentlich, daß es sich nicht rechtfertigen ließe, daraufhin die Abschätzung des Profilwiderstandes und gar des Gewichts zu verändern, weshalb wir bereits bei der letzten Berechnung von $\mathfrak{X}_*$ den gleichen Wert $\mathfrak{S} + \mathfrak{P}$ in Ansatz gebracht haben. Mit den verbesserten Werten $\mathfrak{Y}_*$, $\mathfrak{X}_*$, η_1, η_2 und mit Einführung des berechneten $\varkappa = 1{,}12$ in das dritte Glied der Gl. (112) erhalten wir in Wiederholung des eben dargestellten Rechnungsganges:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 = 5{,}76 \cdot \varkappa & \varphi_2 = 5{,}05 \cdot \varkappa & \eta_1 t_1 = 1{,}08 \cdot \varkappa \\ \eta_2 t_2 = 0{,}45 \cdot \varkappa & \mathfrak{Y}_* = 40{,}6 \cdot \varkappa & \mathfrak{J}_* = 1{,}43 \cdot \varkappa^2 \end{array} \qquad \text{(B 28)}$$

und als Schwebebedingung in der Gipfelhöhe:

$$1 + 0{,}56\,\varkappa^2 = 1{,}49\,\varkappa^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{array}{lll} \varkappa = 1 & 1{,}56 & > 1{,}49 \\ \varkappa = 1{,}1 & 1{,}68 & < 1{,}73 \\ \varkappa = 1{,}06 & 1{,}63 & = 1{,}63 \end{array} \qquad \text{(B 29)}$$

$$\begin{array}{lll} \eta_1 t_1 = 1{,}146 & \eta_2 t_2 = 0{,}579 & \mathfrak{Y}_* = 43 \\ \mathfrak{J}_* = 1{,}61 & \frac{\eta_I}{\eta_1} = 0{,}899 & \frac{\eta_{II}}{\eta_2} = 1{,}20 \end{array} \qquad \text{(B 30)}$$

und damit erhalten wir:

$$\eta_1 = 0{,}556 \qquad \eta_2 = 0{,}417 \qquad t_1 = 2{,}06 \qquad t_2 = 1{,}39. \qquad \text{(B 31)}$$

Diese Ergebnisse dürfen wir in Anbetracht der hinreichenden Übereinstimmung mit den Voraussetzungen als endgültig bezeichnen. Wir erhalten damit als Flächeninhalt der Zelle

$$F = 86 \text{ m}^2 \qquad \text{(B 32)}$$

und eine Flächenbelastung von

$$\tfrac{3600}{86} = 42 \text{ kg/m}^2. \qquad \text{(B 33)}$$

In Anbetracht der verhältnismäßig hohen Leistungsbelastung erscheint in Rücksicht auf den Start auch diese Flächenbelastung, die wir bereits durch die Wahl einer höheren Gipfelhöhe gegenüber den Forderungen der Aufgabe herabgesetzt haben, noch ein wenig zu hoch. Setzen wir als zulässige obere Grenze einen um 8% geringeren Wert für die Flächenbelastung, also etwa 39 kg/m², so sind dementsprechend die Flügeltiefen um 8% zu erhöhen, und wir erhalten für den Oberflügel 2,25 m und für den Unterflügel 1,50 m Flügeltiefe. Den vergrößerten Werten entspricht natürlich auch eine stärkere gegenseitige Beeinflussung, und wir erhalten aus Gl. (39), (40) unter Voraussetzung von $\eta_1 = 0{,}56$, $\eta_2 = 0{,}41$:

$$\frac{\eta_I}{\eta_1} = 0{,}893 \qquad \frac{\eta_{II}}{\eta_2} = 1{,}219. \qquad \text{(B 34)}$$

Und damit bestätigen sich die vorausgesetzten Werte der Auftriebszahlen. Dann ergibt sich für den induzierten Widerstand

$$\mathfrak{J}_* = 1{,}91 \quad \mathfrak{X}_* = 4{,}47 \quad \mathfrak{Y}_* = 46{,}9 \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}_*^2 : \mathfrak{J}_* = 1150 \qquad \text{(B 35)}$$

und damit verfügen wir über alle Größen, die wir zur Berechnung der Flugleistungen benötigen.

5. Die Berechnung der Geschwindigkeiten.

Da wir, selbst wenn die Luftschraube bestimmt ist, in Anbetracht der Unsicherheit der Größe des Vorstroms, den die ihr benachbarten Bauteile erzeugen, den Wirkungsgrad der Schraube nicht genau bestimmen können, wollen wir die Horizontalgeschwindigkeiten für die wahrscheinliche obere und untere Grenze der Nutzleistung berechnen. Als obere Grenze des Schraubenwirkungsgrads möge 65%, als untere Grenze 55% gelten. Dementsprechend erhalten wir aus Gl. (141):

$$\overline{L_0} = 17000 \text{ kg m sk}^{-1} \qquad \underline{L_0} = 14400 \text{ kg m sk}^{-1}$$

$$\mathfrak{F} \cdot 10^{-8} = 0{,}48 \qquad \text{(B 36)}$$

$$\overline{\mathfrak{G}} \cdot 10^{-6} = 2{,}5 \qquad \underline{\mathfrak{G}} \cdot 10^{-6} = 2{,}11.$$

Entnehmen wir nun Tabelle 1 den Wert von ε^2 und Tabelle 3 den Wert von $\frac{\lambda}{\varepsilon}$, so ergeben sich als Ordinaten der Geraden, die mit der biquadratischen Parabel, Fig. 16, zum Schnitt zu bringen ist, für die Abszissen $\frac{V}{100} = 1$ bzw. 2 die Werte:

H	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$
0	2,02	4,52	1,63	3,74
2	2,33	5,39	1,86	4,45
4	1,86	4,82	1,40	3,90

Der Schnitt der Geraden mit der Parabel liefert als obere und untere Grenze der Höchstgeschwindigkeit beim wagrechten Flug und Gl. (143) für die Kleinstgeschwindigkeit die Werte:

H	$\overline{V}$	$\underline{V}$	V_{min}
0	128	120	89
2	136	126	99
4	128	117	110

die wir in Fig. 46 eingetragen haben. Bei Erfüllung der Voraussetzungen über den schädlichen Widerstand und das Gewicht liegen die wirklichen

Werte der Höchstgeschwindigkeit etwa nach Maßgabe der ausgezogenen Kurve wesentlich zwischen den beiden oberen Kurven und schließen mit der unteren Kurve, die die Geschwindigkeit beim größten zulässigen Anstellwinkel, also beim Steigen oder gedrosseltem Motor angibt, das Gebiet der erreichbaren Geschwindigkeiten in jeder Höhe ein. Bei der Interpolation zwischen den (gestrichelten) Grenzkurven durch die (ausgezogene) geschätzte Kurve haben wir zu berücksichtigen versucht, daß der Wirkungsgrad, der wir der nachstehenden Berechnung der Luftschraube entnehmen, in dem in Frage stehenden Gebiet wesentlich mit der Geschwindigkeit wächst, und daß die gemessene Leistung des Motors am Boden höher, in 2000 m geringer als die vorausgesetzte Gleichleistung ist.

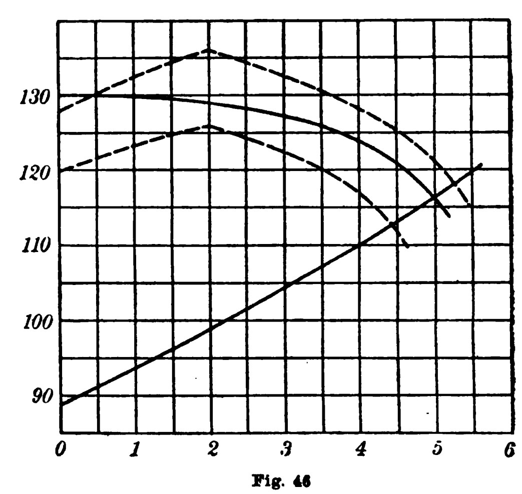


Fig. 46 zeigt den Bereich der erreichbaren Geschwindigkeiten für das in Kapitel IX berechnete Flugzeug.

Aus Geschwindigkeit und Luftdichte läßt sich, da das gegebene Gewicht eine unveränderliche Auftriebskraft fordert, die Auftriebszahl und damit der induzierte und der Gesamtwiderstand für jede Flughöhe bestimmen. Denn der induzierte Widerstand nimmt mit dem Quadrat des Verhältnisses der Auftriebszahlen ab. Für Gipfel- und Reisehöhe ist dieses nach Maßgabe des Diagramms:

$$\left(\frac{116}{129}\right)^2 \cdot \frac{0{,}585}{0{,}815} = 0{,}585. \tag{B 37}$$

Folglich der induzierte Widerstand für Reisehöhe nach Gl. (B 35):

$$(\mathfrak{J}) = 1{,}91 \cdot 0{,}585^2 = 0{,}65 \tag{B 38}$$

und

$$(\mathfrak{X}) = 2{,}56 + 0{,}65 = 3{,}21. \tag{B 39}$$

Damit ist die Empfindlichkeit für Änderungen gegenüber den Voraussetzungen in der Reisehöhe gegeben durch Gl. (198):

$$\frac{\varDelta V}{V} = \frac{\varDelta S + 1{,}3 \cdot \frac{\varDelta G}{G}}{2{,}60 - 9{,}63} \cong - \frac{\varDelta S}{7} - \frac{\varDelta G}{5 \cdot G}. \tag{B 40}$$

Werden z. B. die Kabel mit „Windabfluß" verkleidet, so sinkt ihr Widerstand auf etwa ein Fünftel: $-\varDelta S = 0{,}8 \cdot 0{,}35 = 0{,}28$ m² und selbst eine

Gewichtssteigerung um etwa 20 kg, die hiermit verbunden sein könnte, spielt gegenüber dem Gewinn aus der Verminderung des Widerstandes überhaupt keine Rolle:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{0{,}28}{7} - \frac{20}{18000} = 0{,}04 - 0{,}001 \qquad \Delta V \cong 0{,}04 \cdot 125 = 5\ \text{km/st.} \quad \text{(B 41)}$$

Andrerseits nimmt für jede Person, die an der vorgesehenen Zahl fehlt, und für jede Stunde Flugdauer durch den Betriebsstoffverbrauch die Geschwindigkeit zu um:

$$\frac{\Delta V}{V} \cong \frac{75}{18000} \cong 0{,}004 \qquad \Delta V = 0{,}5\ \text{km/st.} \quad \text{(B 42)}$$

Am Ende des Fluges, also nach 7 Stunden Flugdauer, ist demnach die Eigengeschwindigkeit um rd. 4 km/st größer als zu Beginn. Und die mittlere Geschwindigkeit in Reisehöhe mit voller Personenzahl ergibt sich daher endgültig, wenn wir die Erschwerung der Montage durch Verkleidung der Kabel in Kauf nehmen, zu:

$$129 + 5 + 2 = 136\ \text{km/st,} \quad \text{(B 43)}$$

d. h. bei Windstille kann eine Strecke von rd. 950 km in ununterbrochenem Fluge zurückgelegt werden; dabei gleicht der flachste Gleitflug aus Reisehöhe mit

$$H \cdot \frac{\mathfrak{Y}_*}{\mathfrak{X}_*} = 2 \cdot \frac{46{,}9}{4{,}47} \cong 20\ \text{km} \quad \text{(B 44)}$$

Länge die verringerte Geschwindigkeit (94 km/st) bei schnellstem Steigen (20 min) auf $H = 2$ km aus:

$$6{,}66 \cdot 136 + 0{,}33 \cdot 94 + 20 \cong 950\ \text{km.} \quad \text{(B 45)}$$

Wie stark wirklich erreichbare Höchstentfernungen durch Führung und Wetterlage von dem berechneten Höchstwert abweichen, ist eine rein verkehrstechnische Frage und soll daher hier nicht erörtert werden.

6. Die Berechnung der Gipfelhöhen.

Berechnen wir mit Gl. (151) für die obere bzw. untere Grenze der Nutzleistung

$$\sqrt[3]{\lambda^2 \cdot \varepsilon} = \frac{3600 \cdot 2{,}71}{46{,}9 \cdot 660 \cdot 0{,}5} = 0{,}632 \quad \text{bzw.} \quad = \frac{3600 \cdot 2{,}71}{46{,}9 \cdot 590 \cdot 0{,}5} = 0{,}706 \quad \text{(B 46)}$$

so bestätigt Fig. 15 für $H_L = 2$ die Gipfelhöhen $H_g = 5{,}25$ bzw. 4,45 km, die sich aus Fig. 46 aus dem Schnitt der oberen Kurven mit der unteren ergeben. Die ausgezogene Kurve läßt als wahrscheinliche Gipfelhöhe 5 km erkennen, d. h. denselben Wert, wie wir ihn für die Berechnung der Flügeltiefen angenommen hatten. Die Vergrößerung der Flügeltiefen um 8% in Rücksicht auf den Start wird also zufällig durch den Unterschied zwischen

dem angenommenen und dem auf Grund der Schraubenberechnung geschätzten Wirkungsgrad ausgeglichen. Nach Tabelle 6 ist allerdings eine Mindestgipfelhöhe von 5,2 km erforderlich, um beim Aussetzen eines der beiden Motoren in Bodennähe fliegen zu können. Der Unterschied ist jedoch unerheblich, zumal die effektive Leistung am Boden weit größer als die angenommene Gleichleistung ist. Denn das Gewicht einer Person oder der Betriebsstoffe für eine Stunde im Betrag von rd. 75 kg macht etwa 2% des Vollgewichts aus, und dementsprechend steigt die erreichbare Gipfelhöhe um rd. 150 m für jede Stunde Flugzeit und für jede Person, die an der Zahl der vorgesehenen Passagiere fehlt, unabhängig davon, wieviel Motoren laufen. Ohne Nutzlast und ohne Betriebsstoff überhaupt liegt die Gipfelhöhe bei Antrieb mit zwei Motoren bzw. nur einem Motor etwa bei 9 bzw. 5 km. Das folgt aus Fig. 15, wenn man die oben berechneten Werte $\sqrt[3]{\lambda^2 \varepsilon}$ mit dem Verhältnis von Leergewicht zu Vollgewicht:

$$\frac{2050}{3600} = 0{,}57 \qquad \text{(B 47)}$$

reduziert. Wieweit es möglich ist, diese rechnerischen Grenzfälle zu verwirklichen, ja dabei überhaupt Gleichgewicht herbeizuführen, ist nur bei gegebener Konstruktion zu entscheiden.

7. Die Berechnung der Steigzeiten.

Nach dem Vorstehenden können wir für den Beginn eines Fluges, also für Vollgewicht, mit einer Gipfelhöhe von 5 km rechnen. Das ergibt nach Fig. 18 $\frac{\tau_2}{k} = 4{,}9$. Daraus folgt für die geforderte Steigzeit $\tau_2 = 20$ bei der Nennleistung

$$k = \frac{20}{4{,}9} = \frac{3600}{2 \cdot 175 \cdot 4{,}5 \cdot \eta_s} \qquad \eta_s = 0{,}56. \qquad \text{(B 48)}$$

Nun ist die mittlere effektive Leistung noch etliche Hundertstel höher als die Nennleistung, so daß unbedingt damit gerechnet werden kann, daß der erforderliche Wirkungsgrad zur Erreichung der Steigzeit verwirklicht werden kann. Die Steigzeit bis 4000 m ergibt sich zu etwa 60 Minuten.

Damit erweist sich die gewählte Motorleistung zur Erzielung der geforderten Flugleistungen endgültig als zureichend.

8. Die Berechnung der Luftschraube.

Bei Berechnung der Luftschraube haben wir einen möglichst hohen Wirkungsgrad beim wagrechten Flug in Reisehöhe anzustreben. Da wir Druckschrauben anwenden, haben wir mit einem Vorstrom von 25% zu

rechnen. Dann erhalten wir für die zur Bestimmung der Schraube erforderlichen Konstanten, Gl. (178), die folgenden Werte:

$$C_1 = 265 \cdot \frac{136 \cdot 0{,}75}{1400} = 19{,}3 \tag{B 49}$$

$$C_2 = 1{,}66 \cdot 10^8 \frac{163}{1400^3} \cdot \frac{1}{0{,}815} = 12{,}1 \tag{B 50}$$

wobei die gemessene Leistung für $H = 2$ an Stelle der Nennleistung eingeführt wurde. Da der Punkt $\lg (100\,\lambda) = \lg C_1$ und $\lg (1000\,\mu) = \lg C_2$, durch den wir die Gerade zu legen haben, außerhalb des Bereichs der Fig. 21 liegt, bestimmen wir den Schnittpunkt der Geraden mit der Abszissenachse als:

$$\lg C_1 - \frac{\lg C_2}{5} = 1{,}286 - 0{,}217 = 1{,}069. \tag{B 51}$$

Die Gerade mit Tangente 5 : 1, die wir durch diesen Punkt legen[1]), liefert einen höchsten Wirkungsgrad von etwa 61% für Propeller, deren Steigung das 1,4 bis 1,8fache des Halbmessers beträgt. Je größer die Steigung ist, um so besser wird der Wirkungsgrad mit steigender Geschwindigkeit (Entlastung des Flugzeugs), um so schlechter jedoch mit abnehmender Geschwindigkeit (Steigen). Die kleinste der angegebenen Steigungen liefert zwar für Steigen bessere Werte, läßt aber überhaupt nur einen höchsten Wirkungsgrad von 63% erreichen; zudem ist die Drehzahl sehr empfindlich gegen Geschwindigkeitsänderungen (starkes Abfallen der μ-Kurve). Es wird daher die Steigung von 1,6 R gewählt, die den andern Betriebszuständen gleichermaßen Rechnung trägt. Der Schnittpunkt hat die Abszisse 1,155. Daher ist

$$\lg R = 1{,}286 - 1{,}155 = 0{,}131 \qquad R = 1{,}35 \text{ m} \tag{B 52}$$

$$H = 1{,}6 \cdot R = 2{,}16 \text{ m}. \tag{B 53}$$

Für die mittlere Geschwindigkeit beim Steigen von rd. 94 km/st ergibt sich bei einer gleichzeitigen Abnahme der Drehzahl um 10% ein Wirkungsgrad von etwa 54%, der nach den Berechnungen des vorhergehenden Abschnitts als zureichend zu bezeichnen ist. Zumal wenn man berücksichtigt, daß die der Figur entnommenen Wirkungsgrade mit dem Verhältnis der Fluggeschwindigkeit zur Zustromgeschwindigkeit, also mit dem Faktor 1,33 zu erhöhen wären, wenn nicht eben die Erzeugung des Vorstroms wieder einen beträchtlichen Teil der danach höheren Nutzleistung in Anspruch nähme.

---

1) Da in Fig. 21 die Ordinate im doppelten Maßstabe der Abszisse aufgetragen ist, liegen Gerade mit einer Tangente 5 : 1 graphisch unter einer Neigung 10 : 1, z. B. parallel der Geraden durch den Ursprung und den Punkt mit Abszisse 1,1 und Ordinate 0,5.

9. Die Berechnung des Höhensteuers.

Wir zerlegen die Luftkräfte an den beiden Tragflügeln der Zelle jeweils in ein vom Anstellwinkel unabhängiges Drehmoment und eine mit dem Anstellwinkel wachsende Kraft senkrecht zur Flugrichtung, die unabhängig vom Anstellwinkel unveränderlich in ein Viertel der Flügeltiefe liegt. Wir wollen also das Moment des Widerstandes außer acht lassen; vor allem schon deswegen, weil die Berechnung der Kippmomente des Rumpfes nicht mit entsprechender Genauigkeit durchgeführt werden könnte. Nach der einzigen vorliegenden Untersuchung über diese Frage (Munk, T. B. II, S. 23) scheint der in die untere Fläche eingebaute Rumpf lediglich ein Moment aufzunehmen von der Größenordnung des Moments, das ein entsprechendes in die Tragflächen eingefügtes Flächenstück gleichen Profils erfahren würde.

Wir wollen die Drehmomente, die die Luft auf die beiden Tragflügel äußert, durch ein reines Drehmoment aufnehmen, das nur dadurch zu erreichen ist, daß man statt nur einer Flosse vor oder hinter der Zelle, eine Flosse vor und eine dahinter anordnet.[1]) Dann muß zur Herbeiführung indifferenten Gleichgewichts der Schwerpunkt auf der Verbindungslinie der vorderen Viertel der Flügeltiefen liegen in Abständen von den Tragdecks, die deren Auftriebskräften umgekehrt proportional sind. Daraus folgt der entsprechende Abstand des Schwerpunkts vom oberen Tragflügel in Bruchteilen der Länge dieser Verbindungslinie nach Gl. (B 34) zu:

$$\frac{\eta_2 \cdot t_2}{\eta_1 t_1 + \eta_2 \cdot t_2} = \frac{0{,}41 \cdot 1{,}5}{0{,}56 \cdot 2{,}25 + 0{,}41 \cdot 1{,}5} = 0{,}326. \qquad \text{(B 54)}$$

Liegt der Schwerpunkt, wie vorauszusehen, tiefer, so muß er jedenfalls für mittlere Anstellwinkel auf der Lotrechten durch diesen Punkt liegen. Die Verschiebung des Schwerpunktes gegenüber dieser theoretisch geforderten Lage durch Drehungen der Zelle um die wagrechte Querachse wirkt dann für große Anstellwinkel in dem Sinne, daß der Schwerpunkt gegenüber dem Auftrieb sich nach vorn verschiebt, also die Stabilität erhöht und bei kleinen Anstellwinkeln, zumal, wenn die Flugbahn beim Gleiten geneigt ist, in dem Sinne, daß die Stabilität sinkt. Also wenn bei mittleren Anstellwinkeln Indifferenz vorhanden ist, so tritt bei großem Anstellwinkel eine leichte Stabilität und bei kleinem Anstellwinkel eine leichte Labilität auf. Freilich liegen diese Veränderungen des statischen Stabilitätsgrads in einer Größenordnung mit den Momenten des Widerstandes und machen mit ihnen, abgesehen von der Verteilung der Nutz-

1) Den Schutzanspruch auf derartige Anordnungen hat Verf. der Luftverkehrsgesellschaft L. V. G. (Berlin) übergeben.

last, den Unsicherheitsgrad in bezug auf die Berechnung der statischen Stabilität aus. Das Drehmoment der Tragflügel hat den Betrag:

$$M = \varrho \cdot v^2 \cdot \mathfrak{M} \qquad \text{(B 55)}$$

$$\mathfrak{M} = b \cdot \varphi \cdot (t_1^2 + t_2^2) \qquad \text{(B 56)}$$

$$\mathfrak{M} = 25 \cdot 0{,}04 \cdot (2{,}25^2 + 1{,}5^2) = 7{,}31\ \mathrm{m}^3, \qquad \text{(B 57)}$$

wobei wir wieder den dem Profil Fig. 2 entsprechenden Momentenwert vorausgesetzt haben. Ein Moment gleicher Größe und entgegengesetzten Drehsinns muß nun von der vorderen und hinteren Flosse aufgebracht werden:

$$\mathfrak{M} = \eta_v \cdot F_v \cdot l_v + \eta_h \cdot F_h \cdot l_h \qquad \text{(B 58)}$$

(Index v: vorn; Index h: hinten). Dies Moment darf sich bei Indifferenz seinem Betrag nach auch für andere als irgendeinen angenommenen Anstellwinkel nicht ändern; es muß also erfüllt sein:

$$\eta_v' F_v l_v - \eta_h' F_h l_h \frac{d\alpha_h}{d\alpha_v} = 0. \qquad \text{(B 59)}$$

Hierin bedeuten l die näherungsweise bekannten Hebelarme für die Auftriebskräfte der Flossen, die unter Vernachlässigung des Eigendrehmoments der Flossen in etwa ein Viertel der Flügeltiefe der Flossen hinter der Vorderkante liegen. Durch $\frac{d\alpha_h}{d\alpha_v}$ wird zum Ausdruck gebracht, daß bei der Berechnung die Ablenkung der Strömung für die Schwanzflosse durch die vorausgehende Kopfflosse und die Zelle zu berücksichtigen ist. Hierzu dient (Gl. 219) bzw. (220).

Nehmen wir an, daß die Vorderflosse gleichzeitig mit der Zelle einen zulässigen Höchstwert ihrer Auftriebszahl von $\eta_v = 0{,}5$ erreicht und ihre Breite etwa 3 m und ihr Abstand von der Hinterflosse rd. 10 m beträgt, so ist beim größten zulässigen Anstellwinkel die Ablenkung innerhalb des Bereichs ihrer Spannweite im Mittel

$$\varrho = \frac{0{,}5}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2 \cdot 10}\right]^2}\right) = 0{,}08. \qquad \text{(B 60)}$$

Da wir voraussetzen können, daß die Spannweite der Hinterflosse nicht wesentlich größer ist als die der vorderen, wollen wir diesen Betrag ohne weitere Korrektur in die Rechnung einführen. Die Strömungsablenkung von seiten der Zelle setzt sich damit rein additiv zusammen aus der Ablenkung durch die obere und derjenigen durch die untere Fläche. Wir haben also, um die gesamte Ablenkung zu berechnen, im Zähler in Gl. (219) statt der Flügeltiefe, da die Spannweiten dieselben sind, die die Summe der Flügeltiefen einzusetzen und erhalten:

$$\varrho = \frac{0{,}5}{\pi} \cdot \frac{3{,}75}{25} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \left[\frac{25}{2 \cdot 6}\right]^2}\right) = 0{,}08. \qquad \text{(B 61)}$$

Der absolute Betrag der Ablenkung für die Schwanzflosse durch die Vorderflosse und die Zelle bei dem größten zulässigen Anstellwinkel ist also zufällig gleich groß. Die Änderung der Ablenkung mit dem Anstellwinkel ist aber entsprechend dem verschiedenen Seitenverhältnis von Kopfflosse und Zelle verschieden. Wir entnehmen aus Fig. 5 für die Kopfflosse für ein Seitenverhältnis 1 : 4 den Wert $\eta' = 1{,}94$ und für einen Doppeldecker vom mittleren Seitenverhältnis der beiden Flügel der Tragzelle:

$$\frac{t}{b} = \frac{3{,}75}{2 \cdot 25} = \frac{1}{13{,}4} \qquad \text{(B 62)}$$

für die Ableitung der Auftriebszahl den Wert 1,75. Die Änderung des Ablenkungswinkels mit dem Anstellwinkel ist also für die Kopfflosse:

$$\varrho' = 0{,}08 \,.\, \frac{1{,}94}{0{,}5} = 0{,}31 \qquad \text{(B 63)}$$

und für die Zelle:

$$\varrho' = 0{,}08 \cdot \frac{1{,}75}{0{,}5} = 0{,}28. \qquad \text{(B 64)}$$

Damit wird nach Gl. (221)

$$\frac{d\alpha_h}{d\alpha_v} = 1 - 0{,}31 - 0{,}28 = 0{,}41. \qquad \text{(B 65)}$$

Setzen wir nun für die Hebelarme der Flossen genau genug die vorläufigen Werte $l_v = 4$ m; $l_h = 6$ m ein, so ergibt sich aus (B 59) unter der Voraussetzung, daß die Seitenverhältnisse der beiden Flossen und damit die Ableitungen ihrer Auftriebszahlen gleich groß sind,

$$F_v = F_h \cdot \frac{6}{4} \cdot 0{,}41 = \frac{F_h}{1{,}61}\,. \qquad \text{(B 66)}$$

Die hintere Flosse muß also mehr als eineinhalbmal so groß sein als die vordere. Die starke Änderung der Ablenkungswinkel mit dem Anstellwinkel hat zur Folge, daß der Anstellwinkel der hinteren Flosse sich überhaupt nur wenig ändert, und daß wir somit selbst für den größten zulässigen Anstellwinkel der Zelle mit einer erheblichen negativen Auftriebszahl der Schwanzflosse, also mit einer starken Belastung derselben durch Luftkräfte von oben, rechnen dürfen. Denn der Änderung des meßbaren Anstellwinkels der Kopfflosse vom größten zulässigen Anstellwinkel bis zu verschwindendem Auftrieb

$$\varDelta\beta_v = \frac{0{,}5}{1{,}94} = 0{,}258 \qquad \text{(B 67)}$$

entspricht für die Schwanzflosse nur eine Änderung des wirksamen Anstellwinkels

$$\varDelta\beta_h = 0{,}258 \cdot 0{,}41 = 0{,}106 \qquad \text{(B 68)}$$

und eine Änderung der Auftriebszahl derselben:

$$\Delta \eta_h = \eta' \cdot \Delta \beta_h = 1{,}94 \cdot 0{,}106 = 0{,}206. \tag{B 69}$$

Wenn wir also für den größten zulässigen Anstellwinkel der Vorderflosse eine negative Auftriebszahl $\eta_h = 0{,}30$ für die Schwanzflosse zulassen, so ergibt sich bei verschwindendem Auftrieb der Vorderflosse für die Schwanzflosse erst eine negative Auftriebszahl von

$$-\eta_h = 0{,}30 + 0{,}206 \cong 0{,}50. \tag{B 70}$$

Da nun bei Profilierung der Schwanzflosse nach Fig. 2 negative Auftriebszahlen bis zum Betrag $\eta_{zul} = 0{,}66$ nach Fig. 7 erreicht werden können, so ist mit der getroffenen Wahl der negativen Auftriebszahl für die Schwanzflosse noch eine erhebliche Sicherheit zugunsten der Steuerbarkeit gewährleistet, zumal Ruderausschläge Größtwerte bis zu $\eta = 0{,}75$ zu erreichen gestatten. Denn wenn der Auftrieb der Kopfflosse verschwindet, wird gleichzeitig auch der Auftrieb der Zelle außerordentlich klein, und bei der Abweichung der Momentenkurve, Fig. 1, von ihrer Näherungsgeraden haben wir absolute Sicherheit, daß das Flugzeug sich auch aus einem Kopfsturz mit Sicherheit wieder aufrichten läßt. Und damit folgt aus Gl. (B 58), wenn wir hier den Wert aus Gl. (B 57) und (B 66) einführen,

$$7{,}31 = 0{,}5 \cdot F_v \cdot 4 + 0{,}30 \cdot 1{,}61 \cdot F_v \cdot 6 \tag{B 71}$$

(B 72) $\quad F_v = 1{,}5\ \mathrm{m}^2 \qquad F_h = 2{,}4\ \mathrm{m}^2.$ (B 73)

Vernachlässigen wir nun zur Sicherheit bei der Berechnung des Dämpfungsmoments den Anteil der Zelle an demselben, so ergibt sich nach Gl. (316) und (355) bei gleichem Seitenverhältnis 1 : 4 beider Flossen ($\eta' = 1{,}94$):

$$\mathfrak{w} = \frac{1{,}94}{\mathfrak{Y}' \cdot r^2} \cdot (1{,}5 \cdot 4^2 + 2{,}4 \cdot 6^2) = \frac{2{,}15}{\mathfrak{Y}' \cdot r^2} \cdot \tag{B 74}$$

Bei der Berechnung der Änderung des Auftriebs mit dem Anstellwinkel $\mathfrak{Y}'$ wollen wir in Anbetracht der unvermeidlichen Unsicherheit der Werte η' den Anteil der Flossen an demselben außer acht lassen. Dann erhalten wir aus Gl. (B 35) mit $\eta' = 1{,}75$:

$$\mathfrak{Y}' = 46{,}9 \cdot \frac{1{,}75}{0{,}5} = 164. \tag{B 75}$$

Bei der Berechnung des Trägheitsradius müssen wir, um sicher zu gehen, Vollgewicht und Leergewicht unterscheiden, da der wirkliche Betriebszustand je nach der Anzahl der Passagiere und dem Brennstoffvorrat immer zwischen diesen beiden Werten liegt. Es kann sich natürlich in einem wie dem andern Fall nur um eine näherungsweise Bestimmung handeln, indem man gegenüber dem Abstand der einzelnen Massenpunkte vom Gesamtschwerpunkt den Trägheitsradius der Masse in bezug auf ihren Eigenschwerpunkt vorerst außer acht läßt. Nur wenn die Massen sehr ausgedehnt sind, ist dies nicht zulässig. So für den Rumpf, der

etwa eine Eigenlänge von 10 m besitzt, und für die Fluggäste, die im Rumpf über etwa 5 m Länge verteilt sind. Hierbei wollen wir, da es sich ja nur um eine Überschlagsrechnung handelt, die mehr die Größenordnung als die Größe des Trägheitsradius ergeben sollen, eine gleichmäßige Verteilung des Eigengewichts über die ganze Rumpflänge voraussetzen. Für einen Stab unveränderlichen Querschnitts von der Länge l ist das Quadrat des Trägheitsradius in bezug auf seinen Mittelpunkt als Schwerpunkt gleich $\frac{l^2}{12}$. Wir entnehmen dem vorläufigen Entwurf für die Abstände der Einzelschwerpunkte vom Gesamtschwerpunkt etwa folgende Beträge:

Rumpf 1 m hinter
Stoßrad 4 m vor
Laufräder 1 m hinter
Motoren, einschließlich Kühlwasser, Kühler und Auspufftöpfen 1 m hinter
Schrauben $1\frac{1}{2}$ m hinter
Tragflächen je 0,8 m über bzw. unter
Höhensteuer 4 m vor bzw. 6 m hinter

und von der Nutzlast 800 kg 1 m vor (Personen) und dementsprechend 200 kg 4 m hinter (Gepäck).

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich der Trägheitsradius aus der folgenden Tabelle:

Rumpf	$500 \cdot \left(\frac{10^2}{12} + 1^2\right) =$	4660
Stoßrad	$50 \cdot 4^2 =$	800
Laufräder	$100 \cdot 1^2 =$	100
Motoren usf.	$(640 + 40 + 60 + 10) \cdot 1^2 =$	750
Luftschrauben	$40 \cdot 1{,}5^2 =$	90
Zelle	$450 \cdot 0{,}8^2 =$	290
Steuer	$15 \cdot 4^2 + 20 \cdot 6^2 =$	960
	für Leergewicht:	7650

$$\text{für Leergewicht} \quad 7650 \tag{B 76}$$

$$\text{Nutzlast } 1000 \cdot \frac{5^2}{12} + 800 \cdot 1^2 + 200 \cdot 4^2 = 6080$$

$$\text{für Vollgewicht } 13730 \tag{B 77}$$

Damit ergibt sich der Trägheitsradius für Leergewicht zu:

$$r^2 = \frac{7650}{3600 - 550 - 1000} = 3{,}72 \text{ m}^2 \tag{B 78}$$

und für Vollgewicht: $$r^2 = \frac{13730}{3600} = 3{,}82 \text{ m}^2. \tag{B 79}$$

Da man vermeiden muß, dem Betriebsstoffverbrauch auf die Gleichgewichtslage des Flugzeugs Einfluß einzuräumen, haben wir angenommen,

daß der Schwerpunkt der Betriebsstoffmengen auf der Schwerpunktsquerachse liegt, also zum Trägheitsmoment keinen Beitrag liefert. Wir sehen, daß der Trägheitsradius für Vollgewicht und Leergewicht innerhalb der Rechnungsgenauigkeit gleich groß ist und dementsprechend als unabhängig von der Größe der Nutzlast und dem Betriebsstoffvorrat bezeichnet werden kann. Unter Berücksichtigung der getroffenen Vernachlässigung der Eigenträgheitsmomente können wir genau genug den Trägheitsradius

$$r = 2 \text{ m} \tag{B 80}$$

setzen. Damit erhalten wir aus Gl. (B 74) und (B 75)

$$\mathfrak{w} = \frac{215}{164 \cdot 4} = 0{,}33. \tag{B 81}$$

Demgegenüber fordert die Stabilitätstheorie nach Gl. (370):

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{5 \cdot (\mathfrak{S} + \mathfrak{P}) \cdot \frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}^2} + 1 + \frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Z}}} = \frac{1}{4 \cdot 2{,}56 \cdot \frac{164}{46{,}9^2} + 1 + \frac{164}{1150}} = 0{,}476. \tag{B 82}$$

Das Dämpfungsmoment, das die Flossen liefern, wenn sie lediglich auf das statische Gleichgewicht und seine Indifferenz berechnet werden, ist also unzureichend. Die Flossen müssen mindestens mit

$$\frac{0{,}476}{0{,}33} = 1{,}44 \tag{B 83}$$

vergrößert werden, um für beliebige statische Stabilitätsgrade mindestens dynamisch indifferentes Gleichgewicht für jeden Betriebszustand zu liefern. Nach Gl. (B 72) und (B 73) hat man also mindestens

$$F_v = 1{,}5 \cdot 1{,}44 = 2{,}16 \qquad F_h = 2{,}4 \cdot 1{,}44 = 3{,}46 \tag{B 84}$$

also bei einem Seitenverhältnis 1 : 4 die Flügeltiefe der Vorderflosse zu

$$t_v = \frac{\sqrt{2{,}16}}{4} = 0{,}74 \qquad t_h = \frac{\sqrt{3{,}46}}{4} = 0{,}93 \tag{B 85}$$

zu machen. Runden wir diese Beträge auf $t_v = 0{,}8$ und $t_h = 1{,}0$ m ab, so bedeutet dies eine Vergrößerung der Fläche um 15% gegenüber dem stabilitäts-theoretisch erforderlichen Mindestmaß. Die Spannweite der vorderen Flosse wird also:

$$b_v = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2 \text{ m} \tag{B 86}$$

und die der hinteren $b_h = 4 \cdot 1 = 4$ m.

Wir haben nun noch an Hand der Gl. (414) zu untersuchen, ob die so gewonnenen Ausmaße der Höhensteuer ausreichen, um die dynamischen Anforderungen an das Steuer beim Abfangen zu erfüllen. Dabei müssen wir ungewöhnlich ungünstige Verhältnisse voraussetzen, d. h. Abfangen aus steilem Gleitflug auf geringem Gefälle. Als Abfanggefälle wollen wir

4 m annehmen. Damit beim Abfangen keinesfalls die doppelte Beanspruchung der Zelle gegenüber der normalen Belastung überschritten wird — das Fachwerk der Zelle muß so dimensioniert werden, daß mindestens bis zu dieser Beanspruchung die Formänderungen rein elastisch sind —, darf die Auftriebszahl beim Gleitflug nicht unter die Hälfte ihres zulässigen Höchstmaßes vermindert werden, d. h. die Geschwindigkeit muß am Ende des Gleitflugs unter dem $\sqrt{2}$fachen ihres Betrages bei schnellstem Steigen unmittelbar nach dem Start $\sqrt{2} \cdot 89 = 126$ km/st bleiben.

Berechnen wir nun nach Gl. (B 35) unter diesen Voraussetzungen die Gleitwinkeltangente für den halben Wert der größten zulässigen Auftriebszahl, so reduziert sich der induzierte Widerstand $\mathfrak{J}$ auf ein Viertel und der Auftrieb $\mathfrak{Y}$ auf die Hälfte seines Betrages. Dann erhalten wir:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{P} + \mathfrak{J}}{\mathfrak{Y}} = \frac{2{,}56 + \frac{1{,}91}{4}}{\frac{46{,}9}{2}} = 0{,}13 \qquad \text{(B 87)}$$

gegenüber $\varepsilon = 0{,}095$ des flachsten Gleitfluges Gl. (B 44). Keinesfalls darf eben der Gleitflug mit Verkehrsflugzeugen so steil durchgeführt werden wie mit Kriegsflugzeugen. Wir bestimmen nun aus der schon erwähnten Gl. (414) den größten zulässigen Betrag der statischen Stabilität, der mit den verfügbaren Steuerzusatzkräften beim Abfangen verträglich ist. Denn, wie Gl. (414) zeigt, ist es natürlich wesentlich das Moment des Auftriebs, welches einer Winkeländerung des Flugzeugs und damit der Erzeugung der erforderlichen Zentripetalkräfte entgegenwirkt. Wir können annehmen, daß der Führer die Auftriebszahlen der beiden Steuer im erwünschten Sinne durch Ruderausschlag um mindestens $\varDelta\eta = 0{,}2$ ändern kann. Dann ergibt sich für die beiden Steuer:

$$\varDelta\mathfrak{M} = \Sigma\varDelta\eta \,.\, F \cdot l = 0{,}20 \cdot (2{,}56 \cdot 4 + 4{,}00 \cdot 6) = 6{,}86 \qquad \text{(B 88)}$$

und damit:
$$\varDelta d = \frac{6{,}86}{164} \cdot \frac{(1 + 0{,}5)^2}{24 \cdot 0{,}13^4} \cdot \frac{4^3}{0{,}285^3 \cdot 31^3} = 0{,}14 \qquad \text{(B 89)}$$

wobei wir für $\alpha \cdot h$, dessen Wert unabhängig vom Anstellwinkel ist, den Wert von V_{min} der Tabelle S. 152 für $H = 0$ entnehmen, also mit

$$v_0 = \frac{89}{3{,}6} = 24{,}7 \text{ m/sk} \quad h_0 = 31 \text{ m} \qquad \text{(B 90)}$$

und näherungsweise für das Flugzeug den Betrag der Zelle

$$\alpha_{max} = \frac{\eta}{\eta'} = \frac{0{,}50}{1{,}75} = 0{,}285 \; (\cong 16^0) \qquad \text{(B 91)}$$

gesetzt haben.

Die letzte Rechnung setzt voraus, daß wir uns in der Nähe der in Fig. 36 angegebenen Grenze zwischen periodischer und aperiodischer Drehungsbewegung befinden. Und wenn wir dieser Figur für $\mathfrak{w} = 0{,}5$ den zugehörigen Betrag $\mathfrak{q} = 0{,}06$ entnehmen, so läßt sich daraus mit Gl. (354) unter Benutzung der für Gl. (375) benötigten Definition $\frac{M_q'}{Y'} = \Delta d$ berechnen zu:

$$\Delta d = \frac{\mathfrak{q} \cdot r^2}{2\alpha h} = \frac{0{,}06 \cdot 4}{2 \cdot 0{,}285 \cdot 31} = 0{,}0136. \qquad \text{(B 92)}$$

Der Schwerpunkt darf also höchstens wenige Zentimeter vor seiner Lage bei indifferentem Gleichgewicht, das ist in unserm Fall ein Viertel der Zellentiefe, liegen, um für die Drehungsschwingungen schnellste Dämpfung herbeizuführen, und darf bis zu etwa 14 cm gegenüber der Lage bei Indifferenz nach vorn verschoben sein, ohne daß die Steuerung beim Abfangen beeinträchtigt wird. Nun ist es keineswegs möglich, diesen Grad der Stabilität für alle denkbaren Betriebszustände und Belastungsarten des Flugzeugs vorher zu bestimmen. Die größte Schwerpunktsverschiebung, die nach guter Verteilung der Last vor dem Start während des Fluges eintreten kann, ist die, daß sich ein Fluggast von etwa 75 kg Gewicht um höchstens 7 m nach hinten bewegt. Dadurch wird der Gesamtschwerpunkt um

$$\frac{75 \cdot 7}{3600} = 0{,}146 \text{ m} \qquad \text{(B 93)}$$

nach rückwärts verschoben. Wenn nicht dadurch, daß ein anderer Insasse nach vorn geht, ein Ausgleich geschaffen wird, verschwindet damit auf jeden Fall die statische Stabilität. Aber die damit verbundene dynamische Labilität ist nicht so erheblich, daß es zu rechtfertigen wäre, deswegen allein die statische Stabilität für normalen Flug über das oben angegebene Maß von wenigen Zentimetern zu steigern. Zudem liegt nach dem vorläufigen Entwurf der Schwerpunkt etwa 12 cm unterhalb der Schubrichtung, und dementsprechend kann er nach Gl. (376) zur Herbeiführung gleicher Stabilität bei einem Verhältnis $\frac{S}{G} \simeq \varepsilon \simeq 0{,}13$ (B 78) um etwa 2 cm weiter hinten liegen als unter sonst gleichen Umständen bei zentrischer Schublage. Nach allem wird man also eine Lage von etwa 5 cm vor der Lage bei indifferentem Gleichgewicht bei der Konstruktion anstreben. Bei entsprechender Ausbildung der Flügelaufhängung kann man freilich nachträglich der Zelle Pfeilform geben und damit bei gegebener Belastung eine Verschiebung des Schwerpunktes gegenüber der Zelle nach vorn herbeiführen.

Bei der nun folgenden Berechnung der Anstellwinkel bezeichnen wir der Reihe nach die Kopfflosse, Oberflügel, Unterflügel und Schwanzflosse mit den Indizes 1, 2, 3, 4. Da wir die bei dem größten zulässigen An-

stellwinkel mit Voraussetzungen über die Auftriebszahlen $\eta_v = 0,5$ und $\eta_k = -0,3$ berechneten Flossengrößen nachträglich um 44 und danach noch einmal um 15% vergrößert haben, sind die wirksamen Anstellwinkel der Flossen um ebensoviel kleiner zu machen, als den angenommenen η entspricht:

$$\alpha_1 = \frac{0,5}{1,94} \cdot \frac{1}{1,65} = 0,156 \qquad \alpha_4 = -\frac{0,3}{1,94} \cdot \frac{1}{1,65} = -0,094 \quad \text{(B 94)}$$

Der Unterschied γ zwischen wirksamem und meßbarem Anstellwinkel folgt für das in Fig. 2 dargestellte Profil, das wir auch für die Steuer verwenden wollen, nach Gl. (5), (15), (16) da $\chi \cong \frac{\pi}{4}$ als Abschnitt der Momentengeraden auf der Abszissenachse aus Fig. 1:

$$\gamma = 0,055. \quad \text{(B 95)}$$

Die Kopfflosse lenkt im Bereich ihrer Spannweite die Strömung nach Gl. (B 60) im Mittel um einen Winkel $\varrho = 0,08$ nach unten ab.[1]) Der mittlere Teil der Zelle müßte also um wenigstens diesen Betrag steiler angestellt werden als die äußeren Teile, zumal für diese die Kopfflosse eine, wenn auch wesentlich schwächere Ablenkung der Strömung nach oben hervorruft. Da nun weder eine stetige noch eine unstetige Änderung des Anstellwinkels im angegebenen Sinne konstruktiv gut durchführbar ist, zudem die Strömung in dem in Frage stehenden Bereich zweifellos erheblich durch die Ansaugung der Luftschrauben beeinflußt wird, wollen wir die erforderliche Korrektur in der Weise durchführen, daß wir den etwa 4 m breiten in der Flucht der Kopfflosse liegenden mittleren Teil der Tragflächen um etwa die Hälfte des berechneten erforderlichen Betrages, also $\Delta\alpha = 0,04$, steiler anstellen und den Anstellwinkel des äußeren Teils der Zelle um ebendiesen Betrag durch Höherziehen des Hinterholms (Verspannung) linear nach außen abnehmen lassen, so daß also dann den Flügelspitzen der Anstellwinkel zukommt, wie ihn ohne Störung durch die Kopfflosse die ganzen Tragflächen haben müßten. Wir erreichen durch diese Minderung des Anstellwinkels nach außen zudem eine Steigerung der Seitenstabilität, die ja an sich bei der großen Spannweite natürlich schon recht gut ist. Für die Schwanzflosse kommt die Strömungsablenkung durch die Kopfflosse in nahezu vollem Betrag zur Geltung, und dazu kommt die Ablenkung durch die Zelle, die, wie wir mit Gl. (B 61) festgestellt haben, zufällig den gleichen Betrag $\varrho = 0,08$ erreicht. Damit folgen also die meßbaren Anstellwinkel beim größten zulässigen Anstellwinkel der Zelle für die Flossen zu:

---

1) Wir vernachlässigen dabei den geringfügigen Unterschied der Ablenkung für Zelle und Schwanzflosse, der im vorliegenden Fall etwa 3% beträgt.

$$\overline{\beta_1} = \alpha_1 - \gamma = 0{,}156 - 0{,}055 = 0{,}101 \qquad \text{(B 96)}$$

$$\overline{\beta_4} = \alpha_4 + \Sigma\varrho + \gamma = -0{,}094 + 2 \cdot 0{,}08 + 0{,}055 = 0{,}121. \qquad \text{(B 97)}$$

Bei Berechnung der Schränkung zwischen den beiden Tragflächen haben wir zwecks Herbeiführung gleicher wirksamer Anstellwinkel bei der konstruktiven Festlegung der meßbaren, die infolge des verschiedenen Seitenverhältnisses verschiedene Selbstinduktion, und die infolge der Staffelung bedeutsame Induktion zu berücksichtigen. Denn der Einbau der Motore mit daran gelagerten Luftschrauben fordert die Hinterkanten der Flügel so zu legen, daß das Schraubenblatt in gleichem kleinstem Abstand an ihnen vorbeistreicht; und daraus folgt, weil der Unterflügel wesentlich geringere Flügeltiefe als der Oberflügel hat, eine starke Staffelung. Die Berechnung auf gleichzeitiges Auftreten größter wirksamer Anstellwinkel für Oberflügel und Unterflügel, die wir bei der Berechnnng der Flügeltiefen vorausgesetzt haben, ist nach Messungen von Munck (T. B. II, S. 194, Diagramm III) für größere Spannweiten zweckmäßig. Rechnet man jedoch die dort als günstigst gemessene Schränkung mit den Betzschen Einflußzahlen nach, so zeigt sich, daß diese wie für die Selbstinduktion so auch für die Induktion zwecks Berechnung der meßbaren Anstellwinkel bei großen Auftriebszahlen (im Gegensatz zur Berechnung der induzierten Widerstände, wo sie recht gut zutreffen) etwa auf den doppelten Wert erhöht werden müssen, offenbar, weil die vorausgesetzte gleichförmige Verteilung des Auftriebs über die Spannweite nicht zutrifft. In vorliegendem Fall erhalten wir aus Gl. (21), (22) unter Vernachlässigung kleiner Größen für

$$a = 0{,}5\text{ m} \quad b = 25\text{ m} \quad c = 0{,}0\text{ m} \quad d = 1{,}7\text{ m}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\nu}_{23} &= \ln\frac{b+a}{d+a} - \frac{a}{d^2}\cdot(b-d) = \ln\frac{25{,}5}{2{,}2} - \frac{0{,}5}{1{,}7^2}\cdot 23{,}3 = -1{,}58 \\ \overline{\nu}_{32} &= \ln\frac{b-a}{d-a} + \frac{a}{d^2}\cdot(b-d) = \ln\frac{24{,}5}{1{,}2} + \frac{0{,}5}{1{,}7^2}\cdot 23{,}3 = +7{,}05. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B 98)}$$

Daraus folgt nach Gl. (19) und (20):

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha_{23} &= -1{,}58\cdot\frac{0{,}41\cdot 1{,}50}{157}\cdot 2 = -0{,}0124 \\ \Delta\alpha_{32} &= +7{,}05\cdot\frac{0{,}56\cdot 2{,}25}{157}\cdot 2 = 0{,}1130. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B 99)}$$

Und ebenso erhalten wir für die Selbstinduktion mit dem aus Gl. (33) an Hand von Messungsergebnissen bestimmten rd. doppelten Wert der Gl. (17):

$$\Delta\alpha_{22} = 8\cdot\frac{0{,}56\cdot 2{,}25}{157} = 0{,}0640 \qquad \Delta\alpha_{33} = 8\cdot\frac{0{,}41\cdot 1{,}50}{157} = 0{,}0314. \qquad \text{(B 100)}$$

Nun ist für ein unendlich breites Tragdeck für die größte zulässige Auftriebszahl 0,5 der wirksame Anstellwinkel:

$$\alpha_\infty = \frac{\eta}{\eta'} = \frac{0,5}{\pi} = 0,159. \qquad \text{(B 101)}$$

Ziehen wir hiervon den Winkel γ ab, so erhalten wir für die unendlich breite Tragfläche den meßbaren Anstellwinkel. Wenn wir noch nach unserer oben getroffenen Vereinbarung des Verlaufs der Anstellwinkel über die Spannweite den halben Ablenkungswinkel durch die Kopfflosse, die Induktion und die Selbstinduktion hinzuzählen, so ergeben sich schließlich die größten, zulässigen meßbaren Anstellwinkel für die Flügelmitte zu:

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_2 &= \alpha_\infty - \gamma + \frac{\varrho_k}{2} + \varDelta\alpha_{23} + \varDelta\alpha_{22} \\
&= 0,159 - 0,055 + 0,040 - 0,012 + 0,064 = 0,196 \\
\bar{\beta}_3 &= \alpha_\infty - \gamma + \frac{\varrho_k}{2} + \varDelta\alpha_{32} + \varDelta\alpha_{33} \\
&= 0,159 - 0,055 + 0,040 + 0,113 + 0,031 = 0,288.
\end{aligned} \qquad \text{(B 102)}$$

Wir wollen den Rumpf gegenüber der Zelle nun in der Weise lagern, daß beim normalen Flug in 2000 m die Rumpfachse in die Flugrichtung fällt, die Schubrichtung der Luftschrauben jedoch selbst bei diesem kleineren Anstellwinkel noch um $1^1/_2{}^0$ nach oben geneigt ist.[1]) Nun ergibt sich die Auftriebszahl für den Horizontalflug in 2000 m nach Gl. (B 37) zu:

$$0,585 \cdot 0,50 = 0,292. \qquad \text{(B 103)}$$

Die Auftriebszahl vermindert sich also um

$$\varDelta\eta = 0,208 \qquad \text{(B 104)}$$

und bei dem oben angenommenen Wert von $\eta' = 1,75$ für die Zelle der Anstellwinkel um den Betrag:

$$\varDelta\beta = \frac{0,208}{1,75} = 0,119. \qquad \text{(B 105)}$$

Ziehen wir diesen Winkel von den größten zulässigen meßbaren Anstellwinkeln ab, so erhalten wird endgültig als Winkel zwischen Rumpfachse und Profilsehne:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 0,101 - 0,119 = -0,018 \cong -1^0 \\
\beta_2 &= 0,196 - 0,119 = +0,077 \cong 4\tfrac{1}{2}{}^0 \\
\beta_3 &= 0,288 - 0,119 = +0,169 \cong 9\tfrac{1}{2}{}^0 \\
\beta_4 &= 0,121 - 0,119 = +0,002 \cong 0^0.
\end{aligned} \qquad \text{(B 106)}$$

1) Die entsprechende Hubkomponente des Schubs beträgt für $\sigma = \varepsilon$ nur rd. $0,025 \cdot 0,12 \cdot 3600 \cong 10$ kg.

Liegt die Radbasis, d. h. die Tangente an die Radumfänge, im Seitenriß, wie sich aus konstruktiven Forderung ergibt, unter etwa 4^0 gegen die Rumpfachse, so befindet sich das Stoßrad noch etwa 26 cm über Boden, wenn beim Aufsetzen mit größtem zulässigen Anstellwinkel die Laufräder den Boden bereits berühren. Dadurch ist genügende Sicherheit gegeben, daß keinesfalls das Stoßrad vor den Laufrädern auftrifft und dabei in unzulässiger Weise in Anspruch genommen wird.

10. Die Berechnung der Seitensteuer.

Für die Ausmaße des Seitensteuers ist das Moment bestimmend, das beim Ausbleiben eines der beiden Motoren aufzubringen ist, um den Kurs beibehalten zu können. Setzt ein Motor aus, so hat der andere allein den ganzen Widerstand des Flugzeugs zu überwinden und übt infolge seines Abstands $z_s = 2{,}25$ m von der Symmetrieebene ein Moment:

$$\varrho \cdot v^2 \cdot X \cdot z_s \text{ kg m} \tag{B 107}$$

dem begegnet werden muß durch das Moment des Seitensteuers, das mit F_k m² Fläche (einschließlich Kielflosse und zugehörigen Rumpfheck) $l_k \simeq 6$ m hinter dem Schwerpunkt liegt und bei größtem Ruderausschlag eine „Auftriebszahl“ von wenigstens $\eta_k = 0{,}50$ aufzubringen gestattet:

(B 108) $\quad \eta_k \varrho \cdot v^2 F_k \cdot l_k = \varrho \cdot v^2 \cdot X \cdot z_s \qquad F_k = \frac{X}{\eta_k} \cdot \frac{z_s}{l_k}$ (B 109)

Da zur Erhaltung der Schwebefähigkeit beim Aussetzen eines Motors die Zelle mit dem Höhensteuer auf größten zulässigen Anstellwinkel eingestellt werden muß, ist hier $X_* = 4{,}28$ aus (B 13) einzuführen.

$$F_k = \frac{4{,}28 \cdot 2{,}25}{0{,}50 \cdot 6} = 3{,}2 \text{ m}^2. \tag{B 110}$$

Bei wesentlich quadratischem Seitenverhältnis des Steuers haben wir also bei $\sqrt{3{,}2} = 1{,}8$ m Höhe dem Ruder und der Flosse je etwa 1 m Tiefe zu geben.

Mit viel kleinerer Gesamtfläche der Seitensteuer kann man auskommen, wenn es gelingt, gewölbte Kielflossen oder Steuer im Bereich des Schraubenwinds einzubauen. Solche symmetrisch liegende Steuer müssen so angeordnet werden, daß sie schon im ungestörten Flug nach innen, d. h. auf die Symmetrieebene zu, gerichtete Luftkräfte aufnehmen. Beim Ausfall eines Motors und damit seines Moments in bezug auf den Schwerpunkt fällt dann auch das durch seinen Propellerwind gesteigerte entgegengesetzt gerichtete Moment des hinter ihm liegenden Steuers (bei entsprechendem Ruderausschlag völlig) weg, so daß das Moment des anderen symmetrisch liegenden Steuers gegenüber dem frei werdenden

Moment des andern Motors zu freier Geltung kommt. Beziehen wir die oben gebrauchten Bezeichnungen ausschließlich auf ein im Schraubenwind liegendes Steuer, so gilt mit Gl. (183) statt Gl. (B 108)

$$(\eta_k) \cdot \varrho \cdot v^2 (1 + \vartheta)^2 \cdot (F_k) \cdot l_k = \varrho \cdot v^2 X \cdot z_s \qquad \text{(B 111)}$$

$$(F_k) = F_k \cdot \frac{\eta_k}{(\eta_k)} \cdot \frac{1}{(1+\vartheta)^2} \qquad \text{(B 112)}$$

worin nach Gl. (187) $\vartheta = \frac{X}{\pi R^2} = \frac{4{,}28}{\pi \cdot 1{,}35^2} = 0{,}75$ (B 113)

einzuführen ist; da die Wölbung und fest gegebene Neigung des Steuers etwa $(\eta_k) = 0{,}75$ zu erreichen gestattet, ist schließlich

$$(F_k) = F_k \cdot \frac{0{,}5}{0{,}75} \cdot \frac{1}{(1+0{,}75)^2} = F_k \cdot 0{,}216 \cong 0{,}75 \text{ m}^2. \qquad \text{(B 114)}$$

Durch kleine Zusatzsteuer der angegebenen Bauart[1]) läßt sich also bei wesentlicher Herabsetzung der Größe des am Rumpf angeschlossenen Seitensteuers völlige Steuerbarkeit bei Aussetzen eines Motors erreichen. Daß in jedem Fall im normalen Flug für hohe Wendigkeit mit den berechneten Ausmaßen Gewähr gegeben ist, geht aus der folgenden Betrachtung hervor. Liegt das Flugzeug unter $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^0$ schräg, so ist nach Gl. (516) die Zeit für eine halbe Wendung:

$$t = 4 \cdot \frac{v}{g} \qquad \text{(B 115)}$$

also je nach der Geschwindigkeit rund 10 bis 15 Sekunden, und nach Fig. 42 der Krümmungsradius der Flugbahn:

$$R = 2h = 60 \text{ bis } 140. \qquad \text{(B 116)}$$

Für diese Bewegung ist nach Gl. (505) unter Vernachlässigung von q_1, Gl. (455), mit Gl. (B 90) und $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ höchstens ein Seitensteuermoment

$$q_4 = q_2 \cdot \frac{\varphi_0}{2h} = \frac{q_2}{79} \qquad \text{(B 117)}$$

erforderlich. Berechnen wir nun nach Gl. (449) bzw. genau genug nach Gl. (458) q_2, so haben wir dort für

$$F \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{P} + \mathfrak{J}_0 = 0{,}81 + 1{,}91 = 2{,}72 \qquad \text{(B 118)}$$

einzuführen. Dann ergibt mit der Definition Gl. (504):

$$\varDelta \mathfrak{M}_s = \frac{1}{79}\left[1{,}08 \cdot \frac{b^2}{6}(\mathfrak{P} + \mathfrak{J}_0) + f \cdot \eta' \cdot x^2\right] = \frac{308 + 3{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 6^2}{79} = 6{,}3 \text{ m}^3. \qquad \text{(B 119)}$$

1) Den Schutzanspruch auf derartige Anordnungen hat Verf. der Luftverkehrsgesellschaft L. V. G. (Berlin) übergeben.

Und wenn wir, wie zuletzt vorausgesetzt, für das Steuer eine Fläche von rund 3,5 m², einen Abstand von 6 m, und bei größtem Ruderausschlag eine Auftriebszahl von $\eta_k = 0{,}5$ annehmen, so erhalten wir andrerseits für:

$$\Delta \mathfrak{M}_s = 3{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 6 \cong 10 \text{ m}^3 \qquad \text{(B 120)}$$

also einen erheblich größeren Wert als gefordert. Der Einfluß des Rumpfes auf den eben betrachteten Vorgang kann nur durch Versuch festgestellt werden. Jedenfalls genügt (nach Messungen an Luftschiffmodellen im stetigen Flug) das Steuer ohne Ruderausschlag eine Schräglage des Rumpfes gegenüber der Flugrichtung rückgängig zu machen oder doch wenigstens Indifferenz gegenüber der Schräglage herzustellen ($q_1 = 0$).

11. Die Berechnung der Quersteuer.

Mit 3 m Breite für die Querruder, die selbst unter Berücksichtigung der Durchbiegung der Holme eine gute Lagerung des Ruders zuläßt, erhalten wir für Gl. (519) $\varkappa = 0{,}24$ und damit in Übereinstimmung mit Fig. 43:

$$\varkappa \cdot \left(1 - \frac{\varkappa}{2}\right) = 0{,}21 \qquad \text{(B 121)}$$

d. h., das Quersteuermoment wird bei dieser Ruderbreite gleich 42% desjenigen, was sich erreichen ließe, falls die Querruder über die volle Spannweite der Zelle ausgedehnt würden. Das erscheint in Anbetracht der Anforderungen, die an die Steuerfähigkeit eines Verkehrsflugzeugs gestellt werden müssen, mehr als ausreichend. Die verschwindender, statischer Stabilität entsprechende V-Form läßt sich erst dann nach Gl. (478) aus

$$p_1 = \frac{q_1}{q_2} \cdot p_2 \qquad \text{(B 122)}$$

nach den Gl. (445), (448), (449) berechnen, wenn aus Messungen der Einfluß des Rumpfes auf die Kursbeständigkeit, d. h. der Beitrag zum Wert q_1, Gl. (446), bekannt ist.

12. Die Berechnung des Anlaufs.

Zur Charakterisierung der Abhängigkeit des Schubes von der Geschwindigkeit wollen wir entsprechend Gl. (527) $k = \frac{1}{4}$ annehmen. Dann ergibt sich σ_0 nach Gl. (541) mit $\eta_s = 0{,}60$ für die kleinste Schwebegeschwindigkeit:

$$\sigma_0 = \frac{75 \cdot 0{,}60 \cdot 2 \cdot 193}{\frac{89}{3{,}6} \cdot 3600} = 0{,}195. \qquad \text{(B 123)}$$

Um das Startvermögen nach Notlandungen beurteilen zu können, wollen wir die Anlaufstrecke auch für das Leergewicht des Flugzeugs berechnen, denn nach einer Notlandung im schlechten Gelände kann das Flugzeug

zur Erreichung eines besseren Flugplatzes gezwungen sein, ohne Nutzlast und mit geringer Betriebsstoffmenge zu starten. Für diesen Fall vergrößert sich σ_0 im Verhältnis von Gesamtgewicht zu Leergewicht[1]) (B 47), und wir erhalten: $(\sigma_0) = 0{,}343.$ (B 124)

Für ungewöhnlich gutes Startgelände ergibt sich, wie sich rechnerisch zeigen läßt, im allgemeinen ein kürzerer Anlauf, wenn man mit kleinem Anstellwinkel startet. Der Vorteil ist jedoch sehr geringfügig. Hingegen ist es auf schlechtem Boden außerordentlich viel günstiger, mit großem Anstellwinkel, der infolge des starken Auftriebs die Stützpunkte schnell entlastet, zu starten. Durch die oben angegebene Anordnung der Räder läuft ohne weiteres das Flugzeug mit einem Anstellwinkel an, der nur um 4° kleiner ist als der größte zulässige. Trotzdem wird der Führer beim Start, zumal bei schlechtem Boden, sobald als möglich das Stoßrad abheben und dadurch mit größtem Anstellwinkel starten. Wir dürfen also annehmen: $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_*$ (B 125)

und erhalten dementsprechend für die Anlaufstrecke, Gl. (534) als Konstante die Gl. (532), (535), (536). Nach Gl. (B 90) ist

$$\frac{h_0}{\lg e} = 71{,}4 \text{ m}. \qquad \text{(B 126)}$$

Damit ergibt sich die folgende Tabelle:

	Vollgewicht		Leergewicht		
σ_0	0,195		0,343		
$\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$	0,100		0,248		
μ	0,02	0,10	0,02	0,10	
$\mathfrak{A}$	0,224	0,144	0,409	0,329	
$\lg \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}$	0,350	0,158	0,216	0,122	
$\mathfrak{B}$	0,123	0,043	0,161	0,081	
a_n	200	260	100	110	(B 127)
Δa_n	60	90	30	35	(B 128)

Bei Leergewicht ist also fast ohne Unterschied der Bodenbeschaffenheit der Start bei Windstille nur etwa 100 m lang. Für das Vollgewicht wird er für Windstille bei gutem Boden etwa bei 200 m, bei sehr schlechter Platzbeschaffenheit, wie sie etwa schlechten Erdwegen entspricht, bei 250 m liegen. Startet man jedoch bei nicht völliger Windstille gegen den Wind, so werden diese Strecken ganz erheblich herabgesetzt. Schon bei einer frischen, noch nicht steifen Brise von 5 m/sk werden nach Gl. (345) die Anlaufstrecken um die Beträge Gl. (B 128)

1) Wobei wir in erster Näherung annehmen, daß der Schraubenwirkungsgrad in gleichem Maße wie die kleinste Schwebegeschwindigkeit abnimmt.

kürzer. Da nun an 55, 75, 90 von 100 Tagen Wind über 4, 3, 2 m/sk herrscht, wird der Start gewöhnlich nicht über 150, der Notstart nicht über 80 m in Anspruch nehmen.

13. Die Berechnung des Auslaufs.

Lassen wir für den Auslauf eine Strecke von 200 m zu, so folgt aus Gl. (573):

$$\lg \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_0} + \frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{C}}} = a_n \cdot \frac{\lg e}{h_0} \cdot \left(\frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_*}\mathfrak{C} - \varepsilon_1\right) = 2{,}8 \left(\frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_*}\mathfrak{C} - \varepsilon_1\right) \quad \text{(B 129)}$$

Nun ist nach Gl. (B 35) und Gl. (B 87) $\varepsilon \cong 0{,}10$. Denn das Flugzeug rollt mit dem Anstellwinkel, der sich aus der Anordnung der Räder ergibt, d. h. mit 12^0, während nach (B 91) der größte zulässige wirksame Anstellwinkel 16^0 beträgt. Es ist also $\mathfrak{Y}_1 \cong \frac{3}{4}\,\mathfrak{Y}_*$ und die vorstehende Gleichung ist erfüllt für $\mathfrak{C} \cong 0{,}23$. Nun ist $\mathfrak{C}$ nach Gl. (574) bei gleichen Reibungszahlen der vorderen und hinteren Stützpunkte gleich dieser Reibungszahl selbst; da diese für Räder an sich erheblich kleiner ist, müssen Bremsen angeordnet werden. Bremst man nur die beiden Laufräder, so ergibt sich unter der Voraussetzung, daß der Schwerpunkt 4 m hinter dem Stoßrad, $\frac{3}{4}$ m vor den Laufrädern und $1\frac{1}{2}$ m über Boden liegt, für sehr kleine (verschwindende) Reibungszahlen des vorderen Rades ($\mu_{||} = 0$) die erforderliche Reibungszahl $\mu_{||}$ der Laufräder aus:

$$\mathfrak{C} = \frac{4}{\frac{4 + 0{,}75_*}{\mu_{||}} + 1{,}5} \cong 0{,}23 \qquad \mu_{||} = 0{,}30 \cong \frac{1}{3}. \quad \text{(B 130)}$$

Die Adhäsion ist also ohne weiteres ausreichend, die gewünschte Verzögerung zu sichern, selbst wenn der dritte Stützpunkt, das Stoßrad, nicht gebremst wird; und dies, obgleich das Stoßrad infolge der hohen Schwerpunktslage durch das Kippmoment der verzögernden Kräfte die Laufräder stark entlastet.

Um unwillkürliche Schwenkungen des ausrollenden Flugzeugs durch ungleiche Bremsung der beiden Laufräder zu vermeiden, muß, da eine drehungsfeste Verbindung beider Räder nicht durchführbar und zulässig ist, eine Ausgleichvorrichtung der beiden Bremsen mit dem Seitensteuerhebel verbunden werden. Umgekehrt können dann natürlich willkürliche Drehungen durch verschieden starke Bremsung der Laufräder mittelst Seitensteuerbetätigung eingeleitet werden.[1])

---

[1]) Den Schutzanspruch auf derartige Anordnungen hat Verf. der Luftverkehrsgesellschaft L. V. G. (Berlin) übergeben.

Die Bremsung des Flugzeugs kann jedoch auch in der bekannten Weise durch eine in den Boden selbst eingreifende „Pflugbremse“ bewirkt werden. Greift diese auf der Verbindungslinie der Fußpunkte der Laufräder ein, so muß sie, da Reibungszahlen ≥ 1 damit leicht erreichbar sind, nur höchstens ein Drittel der auf die Laufräder entfallenden Last aufnehmen.

Der Auslauf wird durch Gegenwind von 5 m/sk nach Gl. (545) um rund 50 m verkürzt.

14. Die Berechnung der Fahrgestellabfederung.

Nehmen wir für Gl. (561) an, daß das Arbeitsvermögen des Fahrgestells zwischen $\mathfrak{h} = 0{,}20$ und $\mathfrak{h} = 0{,}25$ liegt, so entspricht dem ein „Aufsetzgefälle“

$$\mathfrak{H} = 0{,}317 \cdot 16{,}1 \cdot \sqrt[4]{\mathfrak{h}^3} = 1{,}52 \text{ bzw. } 1{,}80 \text{ m.} \qquad \text{(B 131)}$$

Der Stoß beim Aufsetzen wird also hart, wenn der Führer die Maschine aus über $1^1/_2$ bzw. $1^3/_4$ m durchsacken läßt. Aber auch die rein elastische Aufnahme des Stoßes läßt sich mehr oder weniger weich durchführen, je nachdem, ob der verfügbare Federweg länger oder kürzer ist. Wir wollen zu dem Zweck einmal eine Hubbegrenzung für die Zusammenpressung der Federn von 15 cm und dann von 20 cm annehmen. Dann erhalten wir nach Gl. (571) für:

$\mathfrak{h}$	0,20	0,25	
f_1	0,15	0,15	0,20
f_0	0,225	0,1125	0,400
n	1,67	2,33	1,50

(B 132)

Dabei gibt n das Vielfache an, auf das die Beanspruchung der Federn durch die größtmögliche Formänderung gegenüber der Montierungsspannung gesteigert wird. Die zwei Laufräder mögen, wie schon im vorigen Abschnitt angenommen wurde, 0,75 m hinter, das Stoßrad 4 m vor dem Schwerpunkt liegen, und der Stoß jedes Rades möge durch je zwei Federn auf jeder Seite des Rades aufgenommen werden. Dann kommen auf die beiden Laufräder im ganzen acht Federn und auf diese zusammen:

$$\frac{4}{4{,}75} = 0{,}843 \qquad \text{(B 133)}$$

des Gesamtgewichts und auf jede der zugehörigen Federn:

$$P_0 = \frac{3600}{8} \cdot 0{,}843 = 380 \text{ kg} \qquad \text{(B 134)}$$

ruhend. Damit ergibt sich zur Berechnung der Federn, wenn wir hierfür die Längen in Zentimetern messen:

$$\frac{P_0}{f_0} \quad 16{,}9 \quad 33{,}8 \quad 9{,}5. \qquad \text{(B 135)}$$

Wir entnehmen „Hütte“ Bd. I, S. 597, für zylindrische Schraubenfedern mit kreisförmigem Querschnitt die Gesetzmäßigkeiten

$$\frac{P}{f} = \frac{G \cdot d^4}{8n\,D^3} = \frac{G}{8} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^3 \cdot d \qquad \text{(B 136)}$$

$$f_* = \pi n \frac{D^2}{d}\frac{k_d}{G} = \frac{\pi k_d}{G} \cdot n \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot d. \qquad \text{(B 137)}$$

Hierin bedeuten:

P die Belastung der Feder in kg
f die Durchbiegung entsprechend der Belastung P in cm
f_* die größte Durchbiegung entsprechend der Tragfähgkeit P_* oder der zulässigen Drehungsspannung k_d
n die Anzahl der Windungen
k_d die zulässige Drehungsspannung in kg/cm²
G den Schubelastizitätsmodul in kg/cm²
d den Durchmesser des Querschnitts in cm
D den mittleren Durchmesser der Feder in cm,

so daß also $D + d = D_a$ den äußeren, $D - d = D_i$ den inneren (lichten) Durchmesser der Feder angibt. Um nun Durchmesser von Querschnitt und Feder bei gegebener Belastung und Durchbiegung explizit zu bestimmen, dividieren wir die beiden gegebenen Gleichungen ineinander und erhalten dann eine Gleichung 5. Grades für das Verhältnis der beiden Durchmesser, aus dem dann, indem man es in die ursprünglich gegebenen Gleichungen einführt, diese selbst mit der Windungszahl als Parameter folgen:

$$D = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}} \qquad d = \frac{c_1}{c_2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \qquad c_1 = \frac{G}{\pi \cdot k_d} \cdot f_* \qquad c_2 = \sqrt[5]{\frac{G^2}{8\pi \cdot k_d}} \cdot \sqrt{\frac{f_*}{\frac{P}{f}}} \qquad \text{(B 138)}$$

n	10	20	30	40	50
$\sqrt[5]{n}$	1,59	1,82	1,98	2,09	2,19
$\sqrt[5]{n^3}$	4,00	6,10	7,70	9,20	10,50

In Rücksicht auf das Gewicht kann als Material für die Federn ausschließlich guter Spezialstahl in Frage kommen, für den man etwa mit einem Gleitmaß:

$$G = 830000 \text{ kg/cm}^2 \qquad \text{(B 139)}$$

und einer zulässigen Drehungsspannung

$$k_d = 10000 \text{ kg/cm}^2 \qquad \text{(B 140)}$$

rechnen kann. Dann erhält man:

$$c_1 = \frac{830000}{\pi \cdot 10000} \cdot f_* = 26{,}4 \cdot f_*$$

$$c_2 = \sqrt[5]{\frac{830000^2}{8 \cdot \pi \cdot 10000}} \cdot \sqrt[5]{\frac{f_*}{\frac{P}{f}}} = 19{,}4 \cdot \sqrt[5]{\frac{f_*}{\frac{P}{f}}} \cdot \qquad \text{(B 141)}$$

Hierin bedeutet f_*, wie gesagt, die größte zulässige Durchbiegung der Feder in cm, also das Hundertfache der Summe von f_0 und f_1, die in m in Gl. (B 132) angegeben sind.

f_0	22,5	11,25	40,0
f_*	37,5	26,25	60,0
$\frac{P}{f}$	16,9	33,8	9,5
$\sqrt[5]{\frac{f_*}{\frac{P}{f}}}$	1,171	0,955	1,445
c_1	990	694	1580
c_2	22,75	18,5	28,1

$n = 30$				$n = 40$			
D	5,65	4,86	7,32	D	4,65	4,07	6,13
d	0,970	1,025	1,016	d	0,916	0,970	0,960
$D + d$	6,62	5,89	8,34	$D + d$	5,57	5,04	7,09
$D - d$	4,68	3,84	6,31	$D - d$	3,74	3,10	5,17.

Wir können also das größere Arbeitsvermögen bei größerem zulässigem Federweg nicht verwirklichen, weil die entsprechenden Federn selbst bei hoher Windungszahl zu großen äußeren Durchmesser bekommen. Sehr kleine äußere Durchmesser erhält man für härtere Federung, also das größere Arbeitsvermögen bei dem kleineren Federweg von 15 cm. Dabei wird man bei einem Drahtdurchmesser von 10 mm mit 3,5 cm lichtem Durchmesser der Feder und mit einer Windungszahl von 35 Windungen auskommen. Das Gewicht derartiger Federn ist rund $3^1/_2$ kg pro Stück, die Baulänge unter Montierungsspannung 50 cm.

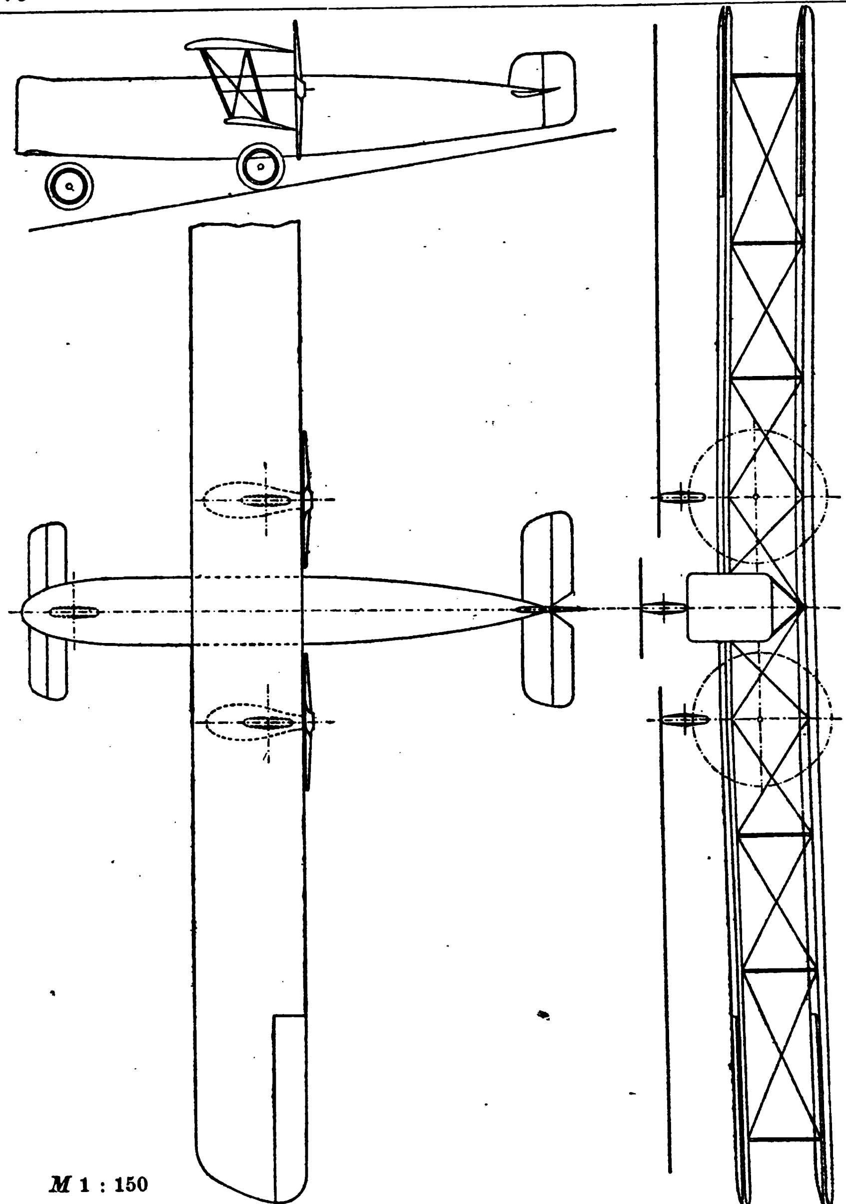


Fig. 47

stellt die zweckmäßigste Zuordnung von Aufriß, Grundriß und Seitenriß für Entwurfszeichnungen dar. In der Zeichnung sind lediglich die errechneten Daten enthalten. Die Art der Verbindung der Zelle mit den Steuerflächen soll durch den eingezeichneten Rumpf nur angedeutet werden, alle anderen Verbindungen sind, um die Zeichnung nicht mit konstruktiven Gedanken zu belasten, nicht eingetragen. Die Linie unter den Laufrädern im Seitenriß bedeutet den Boden beim Aufsetzen mit größtem Anstellwinkel.

X. Zusammenfassung.

Die Theorie des Auftriebs gründet sich auf ein zweidimensionales Strömungsbild und liefert in recht guter Übereinstimmung mit der Erfahrung Größe und Moment der zur Flugrichtung senkrechten Luftkräfte. Eine Luftkraft entgegen der Flugrichtung, wie sie erfahrungsgemäß als eigentlicher Widerstand beobachtet wird, folgt jedoch erst, wenn wir von dem zweidimensionalen Strömungsbild, das unendliche Breite der Flügel voraussetzt, zum dreidimensionalen übergehen, wie es den endlichen Spannweiten der Flugzeuge entspricht. Dann setzen sich infolge des Überdrucks unter, und des Unterdrucks über dem Flügel an die Ränder desselben Wirbel an, die in dem zwischen den Achsen liegenden Gebiet der Luft einen Impuls nach unten, außerhalb desselben nach oben, erteilen. Das bedeutet einen laufenden Energieaufwand zur Erzeugung des Auftriebs, mit andern Worten: Widerstand. Denn da die mittlere Strömungsrichtung der Luft gegenüber dem Flügel bei endlicher Breite nicht mehr mit der Flugrichtung identisch, sondern dieser gegenüber um einen kleinen Winkel nach unten geneigt ist, liefert der Auftrieb eine Komponente entgegen der Flugrichtung, die man als induzierten Widerstand bezeichnet. Der Auftrieb selbst erleidet dabei natürlich durch die Verkleinerung des wirksamen Anstellwinkels einen mit Minderung der Spannweite zunehmenden Verlust.

Für sehr kleine Anstellwinkel stehen auch diese Berechnungen in recht guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Für große Anstellwinkel treffen die Berechnungen des Auftriebsverlustes nicht mehr zu. Aber da man gerade für den gewöhnlichen Flugzustand möglichst große Auftriebszahlen verwenden muß, um mit recht kleinen Flächen und daher geringen Zellengewichten auszukommen, macht sich der Mangel rechnerischer Grundlagen in dieser Beziehung um so peinlicher fühlbar, als gerade die Änderung des Auftriebs mit dem Anstellwinkel in der Theorie der Stabilität eine höchst bedeutsame Rolle spielt. Man ist hier durchaus auf Messungsergebnisse angewiesen. In dieser Richtung ist jedoch eine Verbesserung der Theorie nicht bald zu erwarten. Denn es sind höchst verwickelte Beziehungen, die in einer wirklichen Flüssigkeit die Abweichungen vom theoretischen Strömungsbild reibungsfreier Flüssigkeiten zur Folge haben. Und eben in diesen Abweichungen ist es begründet, daß der Auftrieb sich überhaupt nicht über gewisse Grenzwerte steigern läßt; sondern daß das Strömungsbild oberhalb eines bestimmten Anstellwinkels erfahrungsgemäß seinen Charakter völlig ändert. Bis nahe an diesen Grenzwert heran steht jedoch die Berechnung der induzierten Widerstände in so vorzüglicher Übereinstimmung mit der Erfah-

rung, daß die betreffenden Gleichungen nicht allein zur Vorausberechnung der Flugleistungen verwendet werden können, sondern auch zur Bestimmung derjenigen Dimensionen, die man Flugzeugen zwecks Erreichung von Höchstleistungen in bestimmter Richtung zu geben hat. Man kann so, je nach den Voraussetzungen der Aufgabe, die dem Konstrukteur gegeben ist, wenn man, wie erforderlich, Spannweite und Bauhöhe zulässige Größtwerte gibt, die Flügeltiefen berechnen, die der Erreichung größter Geschwindigkeit, Tragfähigkeit, Gipfelfhöhe und Steigfähigkeit dienen. Die derart zwecks Erreichung größter Geschwindigkeit berechneten Flügeltiefen lassen sich freilich nicht immer ohne weiteres verwirklichen; denn sie ergeben leicht so kleine Flächen, daß der Anlauf ungewöhnlich lang und der Auslauf durch die hohe Landungsgeschwindigkeit sehr gefährdet wird. Außerdem gibt es natürlich noch andere Forderungen, die Kompromisse den zur Erreichung höchster Flugleistung erforderlichen Werten gegenüber notwendig machen. Es sind dies Rücksichten auf einfache Herstellung der Zelle, auf ihre Festigkeit, ihre Lage gegenüber dem Flugzeugkörper usf. Hierdurch wird man auch den Grad der Staffelung bestimmen lassen, der bei entsprechender Schränkung der Flügel gegeneinander keinen wesentlichen Einfluß auf die Größe des induzierten Widerstandes der Zelle hat.

Diesen kann man daher lediglich als Funktion von Spannweite und Abstand der Flügel angeben. Man erhält so unter Voraussetzung gleichen Auftriebs und gleicher Spannweiten Verhältniszahlen für den induzierten Widerstand, die, wenn wir von der konstruktiven Durchführung absehen, schließen lassen, daß der Dreidecker am günstigsten ist, wenn die Spannweite etwa 3 bis 12mal so groß ist als die Bauhöhe. Ist die Spannweite noch kleiner, so ist der Vieldecker, ist sie größer, der Zweidecker zu bevorzugen. Erst für verschwindende Flügelabstände, wie sie in der Praxis gar nicht vorkommen, wird der Zweidecker so ungünstig wie der Eindecker. Daß man fast durchweg hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit des Eindeckers falschen Urteilen begegnet, ist darauf zurückzuführen, daß man entsprechend der üblichen Art der Darstellung in Polardiagrammen (Widerstandszahl über Auftriebszahl) nur die Widerstände von Eindeckern und Mehrdeckern aus Flügeln gleichen Seitenverhältnisses miteinander verglichen hat, ohne Rücksicht darauf, daß zur Erzeugung eines bestimmten Auftriebs bei gegebener Spannweite man dem Doppeldecker nur etwa die Hälfte, dem Dreidecker nur ein Drittel der Flügeltiefe zu geben braucht, wie sie der Eindecker fordert; daß also für die Mehrdecker ungleich günstigere Verhältnisse, vor allem hinsichtlich der selbsinduzierten Widerstände, die mit dem Verhältnis der Flügeltiefe zur Spannweite abnehmen Gl. (17), zustande kommen. Zudem bringt die Versteifung der Eindecker leicht größere Gewichte und schädliche Widerstände mit sich als dieFach-

werksbildung beim Mehrdecker. Aber selbst bei konstruktiv gleich günstiger Durchführung bleibt immer noch eine beträchtliche Überlegenheit des Doppeldeckers gegenüber dem Eindecker rein aus ärodynamischen Gründen bestehen, während die Überlegenheit des Dreideckers bei Spannweiten gleich der drei- bis zwölffachen Bauhöhe nur geringfügig ist und recht leicht durch die Art der Ausführung verwischt wird.

Immerhin liefert die Näherungsformel, Gl. (43), auf die sich diese Überlegungen gründen, recht gute Voraussetzungen über die Größe des Widerstandes für die Berechnung der Flügeltiefen gemäß der Forderung einer Höchstleistung in bestimmter Richtung. Ist für diese Rechnung hinreichende Übereinstimmung zwischen den Resultaten und den Voraussetzungen erzielt, was gewöhnlich schon nach dem zweiten Rechnungsgang der Fall ist, so sind damit alle Maße für den Entwurf gegeben, die auf die Leistungen des Flugzeugs Einfluß haben. Denn neben den Spannweiten und der Bauhöhe setzt die Rechnung von vornherein eine bestimmte Leistung voraus, wie sie dem nach Überschlagsrechnungen irgendwelcher Art gewählten Motortyp zukommt. Der zweifellos bequemere, in allerlei Handbüchern übliche, umgekehrte Rechnungsgang, unter Voraussetzung bestimmter Abmessungen des Flugzeugs die erforderliche Leistung zu berechnen, hat in der Praxis natürlich keine Bedeutung, da in der Tat zur Auswahl immer nur eine beschränkte Anzahl Motorarten zur Verfügung steht. Um die Wahl des Motors zu erleichtern in Fällen, die außerhalb des Erfahrungsbereichs des Konstrukteurs liegen, haben wir für die vornehmste Aufgabe des Verkehrsflugzeugs, eine gegebene Strecke in kürzester Zeit zurückzulegen, eine Näherungsformel entwickelt, die erkennen läßt, daß die Steigerung der Leistung nur dann erhebliche Bedeutung gewinnt, wenn die Nutzlast beträchtlich ist. Denn es ist selbstverständlich, daß mit der Steigerung der Leistung nicht allein das Gewicht der Motoren, sondern fast das ganze Leergewicht des Flugzeugs, und außerdem das Gewicht der Betriebsstoffe und deren Behälter für gegebene Flugdauer, proportional wächst; daß also bereits der größte Teil des Leistungszuwachses, den man durch Einbau stärkerer Motoren erhält, durch die mit der entsprechenden Vergrößerung und Versteifung der Zelle wachsenden Widerstände bereits in Anspruch genommen wird. Aber selbst unter günstigsten Verhältnissen bleibt die Steigerung der Geschwindigkeit aus den angegebenen Gründen ganz erheblich hinter der verhältnismäßigen Steigerung der Leistung zurück. Denn wenn wir in eine gegebene Zelle bei gegebenem Anstellwinkel ohne Veränderung der Widerstände eine um 33 % höhere Leistung einbauen, so steigt die Geschwindigkeit um nur 10 % und der Auftrieb nur um 21 %. Nimmt also das Gewicht infolge der Leistungssteigerung um 21 % zu, wie das je nach dem Verhältnis der

Nutzlast zum Leergewicht mehr oder weniger genau zutreffen wird, so sind damit die beiden Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte wieder erfüllt.

Dann bleibt noch die Aufgabe, der dritten Gleichgewichtsbedingung, der der Momente, zu genügen, durch entsprechende Wahl von Lage und Abmessungen des Höhensteuers. Aber schon bevor man in dieser Hinsicht endgültige Entscheidungen fällt, läßt sich die Größe, und damit der Widerstand des Höhensteuers in Anbetracht der Unsicherheit, mit der die Berechnung des schädlichen Widerstandes notwendig behaftet ist, hinreichend genau bestimmen, um die Flugleistungen voraus zu berechnen, sobald neben den schon angegebenen Voraussetzungen die Flügeltiefen bekannt sind. Die Berechnung der Geschwindigkeit geschieht am besten graphisch; denn die Vereinigung der Gleichgewichtsbedingungen liefert für sie eine Gleichung, die neben einem absoluten Glied nur die erste und vierte Potenz der Geschwindigkeit aufweist. Man erhält also für jede Höhe die Geschwindigkeit V im Diagramm über V, indem man die Gerade mit der Parabel vierten Grades zum Schnitt bringt. Die Geschwindigkeiten beim wagerechten Flug mit „Vollgas" stellen natürlich für die gegebenen Höhen die größten, überhaupt erreichbaren Geschwindigkeiten dar, da die volle Nutzleistung als Vortriebsleistung verwendet wird. Entsprechend erhält man die geringsten Geschwindigkeiten in den betreffenden Höhen, wenn man, um den zulässig größten Teil der Leistung zum Steigen zu verwenden, die Vortriebsleistung auf ein geringstes Maß setzt. Diesem Zwecke dient die Vergrößerung des Anstellwinkels auf das größte zulässige Maß. Denn dann genügt zur Erzeugung der erforderlichen Tragfähigkeit eine geringe Geschwindigkeit, ohne daß der Widerstand übermäßig gesteigert würde. Allerdings gestattet die geringe Größe der emprisch erreichbaren Auftriebszahlen bei der Größe der unvermeidlichen schädlichen Widerstände leider nicht, diejenigen Auftriebszahlen zu verwirklichen, die dem Minimum der Vortriebsleistung zukämen. Die der größten Steiggeschwindigkeit entsprechenden geringsten Fluggeschwindigkeiten schließen in ihrer diagrammatischen Darstellung über der Höhe mit den höchsten Fluggeschwindigkeiten, wie sie dem Horizontalflug zukommen, das Gebiet der erreichbaren Geschwindigkeiten ein (Fig. 46), die man dadurch herbeiführen kann, daß man die Nutzleistung durch Drosseln des Motors in entsprechendem Maße herabsetzt oder teilweise zur Leistung von Hubarbeit (Steigen) heranzieht. Der Schnitt der beiden Kurven, der größten und kleinsten Geschwindigkeit, gibt im Diagramm die Gipfelhöhe an, über die hinauszusteigen deshalb nicht möglich ist, weil in ihr bereits die volle Nutzleistung zur Erzeugung der zum Schweben notwendigen geringsten Geschwindigkeit erforderlich ist. Die Gipfelhöhe hängt natürlich in hohem Maße von der Größe der geforderten Tragfähigkeit, also

dem Gesamtgewicht des Flugzeugs, ab. Es ergibt sich, indem man die betreffenden Formeln differenziert und diese Beziehungen auf endliche Unterschiede von Höhe und Gewicht erweitert, unabhängig davon, wie hoch die Gleichleistungsgrenze des Motors und die Gipfelhöhe liegt, solange die Gipfelhöhe nur überhaupt größer ist als die Gleichleistungsgrenze, daß die Gipfelhöhe jeweils um etwa 75 m sinkt bzw. steigt, wenn das Flugzeug um ein Hundertstel des Gesamtgewichts über- bzw. entlastet wird. Damit läßt sich an Hand der Fig. 17 bis 20 auch leicht feststellen, welchen Einfluß eine Überlastung bzw. Entlastung auf die Steigzeiten hat. Denn die Gleichung für die Steigzeiten läßt sich leicht so vereinfachen, daß sie neben der Gleichleistungsgrenze des Motors nur noch die Gipfelhöhe und die „Leistungsbelastung" des Flugzeugs enthält. Demnach macht sich für das Steigvermögen z. B. eine Steigerung der Nutzlast in doppelter Hinsicht geltend, indem sie sowohl die Leistungsbelastung erhöht, als auch die Gipfelhöhe herabsetzt. Die Integration der Gleichung der Steigzeiten ist leider nicht unmittelbar möglich, sondern kann nur durch Reihenentwicklung des Integranden durchgeführt werden. Immerhin besitzt die Reihe, von gewissen extremen Fällen abgesehen, eine so ausgezeichnete Konvergenz, daß man mit drei bis vier Gliedern schon hinreichend genaue Werte erhält und sich selbst für jene extremen Fälle bei der sich aus der Art der Funktion ergebenden Stetigkeit der Konvergenz durch graphische Extrapolation Werte verschaffen kann, die rein rechnerisch mit dieser Genauigkeit nur bei unglaublichem Zeitaufwand zu bestimmen wären.

Alle diese Leistungsberechnungen kann man natürlich nur auf einen bestimmten Zustand der Atmosphäre beziehen, wobei wir den mittleren Gleichgewichtszustand der Atmosphäre über Mitteleuropa zugrunde gelegt haben. Der Einfluß der Temperaturabnahme mit der Höhe darf dabei natürlich nicht vernachlässigt werden, und wir haben daher statt der üblichen logarithmischen Barometerformel eine Exponentialfunktion entwickelt, die bei dem auf Grund der meteorologischen Messungen berechneten Mittelwerte des Temperaturgefälles von 0,57° auf 100 m eine numerisch besonders einfache Gestalt annimmt (Gl. 130). Von der Dichteabnahme der Luft ist selbstverständlich in hohem Maße auch die Leistungsabnahme des Motors abhängig, dessen indizierte Leistung der in der Zeiteinheit angesaugten Sauerstoffmenge wesentlich proportional ist. Nimmt man mit Kutzbach an, daß 10% der indizierten Bodenleistung für die Brennstofförderung und innere Reibung des Motors verbraucht werden, und der thermische Wirkungsgrad sich mit der Dichte nicht erheblich ändert, so ergibt sich daraus eine Annahme über die Leistungsabnahme der Motoren, die in ausgezeichneter Übereinstimmung mit Versuchen in der Unterdruckkammer bzw. Messungen im Flugzeug

steht, und die den Resultaten unserer Rechnungen eine Bedeutung zuspricht, wie sie Ergebnissen zweifelles nicht zukommt, die mit der üblichen Annahme gewonnen sind, daß die Leistung eine Potenzfunktion der Dichte sei.

Sind so unter der Voraussetzung bestimmter Werte des Schraubenwirkungsgrades die Leistungen bestimmt, so hat man die Abmessungen der Luftschraube zu bestimmen derart, daß sie einen höchsten Wirkungsgrad für den Betriebszustand erreicht, der der gewünschten Höchstleistung entspricht. Dabei ist man durchaus auf Versuchsergebnisse angewiesen, da die Strömungsverhältnisse so verwickelt sind, daß sie sich einer genauen Berechnung entziehen. Aber auch Versuchsergebnisse sind mit großer Vorsicht zu verwerten, da geometrische Ähnlichkeit des Vorgangs nicht unbedingt hydrodynamische mit sich bringt. So liefern Versuche mit Luftschraubenmodellen im Windkanal völlig andere Ergebnisse, als sie für Luftschrauben natürlicher Größe festgestellt sind. Hingegen ist die Übereinstimmung mit diesen bei den von uns dargestellten Versuchen, die Schaffran mit Bronzemodellen im Wasserkanal durchgeführt hat, recht gut und jedenfalls völlig hinreichend, einen Anhalt für die Dimensionierung der Schrauben zu bieten. Für die Darstellung der Schaffranschen Versuchsergebnisse haben wir eine logarithmische Form gewählt, wie sie zuerst von Eiffel (Lit. 15) angegeben worden ist. Die Berechnung der Schrauben mit Hilfe dieses Diagramms geschieht in Anbetracht der gegebenen Betriebsbedingungen freilich auf völlig andere Weise, als sie etwa Eiffel oder Bendemann (Lit. 8) vorgeschlagen haben. Ist die Schraube bestimmt, so lassen sich mit Hilfe der logarithmischen Schaulinien die Wirkungsgrade auch für andere Betriebszustände als den betrachteten ermitteln und dementsprechend die mit angenommenen Werten des Wirkungsgrads berechneten Flugleistungen richtig stellen. Bei der Berechnung der Schrauben ist zu berücksichtigen, daß die Strömungsverhältnisse für die im Flugzeug eingebauten Schrauben stark unter dem Einfluß benachbarter Bauteile (Rumpf, Flügel) stehen. Man muß erfahrungsgemäß in die Schraubenberechnung eine Marschgeschwindigkeit einführen, die erheblich unter der eigentlichen Fluggeschwindigkeit liegt. Das gilt nicht nur für „Druckschrauben", die im Bereich des Vorstroms der Motorboote liegen. So wie bei diesen das Motorboot die Zuströmung beeinträchtigt, hebt bei Zugschrauben das Motorboot den der Luft erteilten Impuls im Innern des Schraubenstrahls zum Teil wieder auf. Natürlich erfahren überhaupt Bauteile, die im Bereich des Schraubenstrahls liegen, erhöhten Widerstand; denn die der Luft vom Schraubenblatt erteilte Zusatzgeschwindigkeit erreicht gelegentlich die Größe der Fluggeschwindigkeit, so daß der Widerstand also, wie auch durch eigene Messungen bestätigt wird, bis zum vierfachen des-

jenigen Betrages wächst, den der betreffende Bauteil im Fahrtwind allein erfahren würde. Dabei kann man als Querschnitt des Strahls für die übliche Länge der Flugzeuge hinreichend genau den Schraubenkreis ansprechen.

Nächst den Flugleistungen sind für die Bewertung des Flugzeugs die Flugeigenschaften ausschlaggebend, die wesentlich abhängig sind von der Art des Gleichgewichts. Es genügt natürlich nicht, die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen; das dadurch geschaffene Gleichgewicht muß wenigstens indifferent, wenn nicht stabil sein. Dies gilt nicht nur hinsichtlich des Momentengleichgewichts um die (zur Symmetrieebene senkrechte) Querachse, sondern in mindestens gleichem Maße für das seitliche Gleichgewicht, das aus Symmetriegründen ohne weiteres vorhanden ist. Ja, es genügt nicht einmal, das übliche Stabilitätskriterium zur Anwendung zu bringen, wonach bei Störungen lediglich Kräfte gefordert werden, die zur Ruhelage zurückführen, sondern der Begriff der Stabilität ist in seiner Anwendung auf das Flugzeug wesentlich weiter zu fassen. Man kann sich sehr wohl vorstellen, daß Kräfte der eben besprochenen Art bestehen, die Amplitude der von ihnen herbeigeführten Schwingungen aber infolge einer negativen Dämpfung zunimmt; daß also eine anfangs geringe Störung ein unzulässig großes Maß erreicht, obwohl im geläufigen Sinne stabilisierende Kräfte vorhanden sind. Der Begriff einer negativen Dämpfung enthält einen Widerspruch gegen die bekannte Vorstellung einer Dämpfung schlechtweg, die sich, gleichgültig welcher Art, jeder Bewegung überhaupt widersetzt. Darin mag zum Teil die Schwierigkeit begründet sein, sich die entsprechenden Bewegungsvorgänge, ihre Folgen und Ursachen vorzustellen. Eine negative Dämpfung ist selbstverständlich ebenso unzulässig wie negative Stabilität (Labilität!), wenn wir hier unter Stabilität im engeren Sinne die sog. statische Stabilität, d. h. die Größe der rückführenden Kräfte verstehen. Aber es genügt natürlich nicht, Dämpfung und rückführende Kräfte positiv zu machen — wozu freilich die üblichen mathematischen Stabilitätskriterien verführen — sondern damit eine möglichst schnelle Beseitigung von Störungen erfolgt, müssen beide auch der Größe nach, in bestimmten Beziehungen zueinander stehen. Denn übermäßige rückführende Kräfte führen immer wieder mit erheblicher Geschwindigkeit über die erstrebte Gleichgewichtslage hinaus, und übermäßige Dämpfungen gestatten nicht, diese in kürzester Zeit zu erreichen. Demnach ist es am günstigsten, durch die Dimensionierung der wirksamen Organe dafür zu sorgen, daß die nach einer Störung einsetzende Bewegung auf der Grenze zwischen den stark gedämpften aperiodischen Bewegungen und den schwach gedämpften periodischen steht. Aus diesen Forderungen ergeben sich in der Tat so geringe Beträge für die Größe der rückführenden Kräfte, wie sie bewährte Bauarten aufweisen. Eine

möglichst schnelle Beilegung von Längsschwingungen, wie sie im Flug vor allem durch Änderungen der Windstärke wachgerufen werden, hat also ein Momentengleichgewicht um die Querachse zur Voraussetzung, das der Indifferenz so nahe steht, als es eben bei der Gefahr erheblicher Lagenstörungen zulässig ist. Denn wir müssen natürlich immer im Auge behalten, daß nicht nur die Anforderungen an die statische Stabilität sich mit dem Betriebszustand ändern, sondern daß die statische Stabililät selbst sich mit dem Anstellwinkel, wenn auch manchmal nur in verschwindendem Maße, ändert, vor allem, daß sie in jedem Fall beim Verlassen des üblichen Bereichs der Auftriebszahlen von 0,25 bis 0,50 vollkommen andere Beträge annimmt.

Für die Berechnung von Höhensteuer und Schwerpunktslage haben wir also die Bedingung des Längsgleichgewichts und die seiner Indifferenz zur Verfügung. Diese Bedingungen nehmen rechnerisch besonders einfache Formen an, wenn man, wie naheliegt, die Momente aller Luftkräfte auf den Schwerpunkt bezieht, da dann der Staudruck als Proportionalitätsfaktor aller Momente aus den Gleichungen herausfällt. Ungleich erheblicher ist jedoch die Vereinfachung, die man dadurch erhält, daß man statt der üblichen Einführung einer Funktion für die „Druckpunktswanderung“ (Lage der Luftdruckresultierenden) das Moment der Luftkräfte unmittelbar in die Rechnung einführt. Denn Messungen zeigen in voller Übereinstimmung mit strömungstheoretischen Betrachtungen, daß das Moment der Luftkräfte eine lineare Funktion des Auftriebs ist. Dieser mathematische Zusammenhang darf also mechanisch anschaulich so gedeutet werden, daß die Luft auf den Tragflügel ein von dessen Lage zur Strömungsrichtung unabhängiges Drehmoment und eine zur Strömungsrichtung normale Kraft äußert, die ihre Lage gegenüber dem Flügel nicht ändert. Während das Drehmoment mit der Wölbung des Profils stark wächst (für Flügel symmetrischen Profils natürlich aus Symmetriegründen verschwindet), liegt die resultierende Kraft ohne Unterschied des Profils und des Anstellwinkels durchweg in einem Viertel der Flügeltiefe hinter der Vorderkante. Es genügte also, den Gesamtschwerpunkt auf dieser Lotrechten anzuordnen, um Gleichgewicht herzustellen, wenn nicht eben jenes Drehmoment vorhanden wäre. Dies Drehmoment wirkt im Sinne einer Verkleinerung des Anstellwinkels (negativ) und muß durch ein gleich großes, entgegengesetzt gerichtetes (positives) beseitigt werden. Die Art und Weise, in der dies geschieht, läßt uns drei Grundtypen der Flugzeuge unterscheiden. Mit Kopfflosse, mit Schwanzflosse und pfeilförmige Flügel ohne Flosse. Um ein positives Moment hervorzurufen, genügt es, eine kleine Hilfsfläche mit großem Anstellwinkel vor (Kopftyp „Ente“) oder mit negativem Anstellwinkel hinter (Schwanztyp) der Zelle anzuordnen. Man kann

aber auch die Tragflügel selbst zur Leistung des erforderlichen Moments zwingen, indem man ihnen starke Pfeilform gibt und den Anstellwinkel stark nach außen abnehmen läßt. Dann liefern die erhöhten Auftriebskräfte vor und die verminderten hinter dem Schwerpunkt das notwendige positive Moment. Nun ist, wie gesagt, das negative Moment der Flügel unabhängig vom Anstellwinkel, während das Moment, das eine Hilfsfläche äußert, mit zunehmendem Anstellwinkel wächst oder abnimmt, je nachdem, ob die Hilfsfläche vorn oder hinten liegt. Und um diese Änderung des Moments zwecks Herbeiführung indifferenten Gleichgewichts wieder aufzuheben, hat man den Schwerpunkt ein wenig vor bzw. hinter der resultierenden Auftriebskraft der Zelle anzuordnen, damit deren Moment, das ja auch mit Vergrößerung des Anstellwinkels zunimmt, für jeden Anstellwinkel Gleichgewicht herbeiführt. Der Schwerpunkt muß also beim Kopfflossentyp vor, beim Schwanzflossentyp hinter und kann, wenn Kopf- und Schwanzflosse vorhanden sind, in dem ersten Viertel der Zellentiefe liegen. Die Leistungsbeeinträchtigung durch die Hilfsflächen ist in allen Fällen wesentlich dieselbe, wenn man berücksichtigt, daß die Tragfähigkeit durch die Anordnung einer Kopfflosse gesteigert, durch die Anordnung einer Schwanzflosse jedoch wenigstens bei kleinen Anstellwinkeln herabgesetzt wird. Denn der Kopfflosse muß man, damit sie auch bei verschwindendem Anstellwinkel der Zelle noch das Moment leistet, sehr große Anstellwinkel geben, die erheblichen Widerstand mit sich bringen, und zudem vergrößert sie den induzierten Widerstand der Zelle, indem sie die Strömung im Bereich ihrer Spannweite nach unten ablenkt. Schwanzflossen müssen dagegen bei verschwindendem Anstellwinkel der Zelle negative Anstellwinkel besitzen, so daß bei mittleren Anstellwinkeln nur der reine Profilwiderstand der Hilfsfläche in Rechnung zu setzen ist. Aus diesen Zusammenhängen folgt selbstverständlich, daß man auch für die Hilfsflächen gewölbte Profile verwenden muß, um in jedem Fall mit einer möglichst kleinen Fläche das erforderliche Moment zu erhalten. Das beim Schwanzflossentyp übliche symmetrische Profil ist also zweckmäßig durch ein unsymmetrisches mit nach oben offener Wölbung zu ersetzen. Natürlich haben die Hilfsflächen dem Flugzeugführer für die Höhensteuerung zur willkürlichen Änderung des Anstellwinkels der Zelle zu dienen. Dementsprechend sind Vorrichtungen vorzusehen, um die Anstellwinkel der Hilfsflächen zu ändern. Hierzu ist es freilich nicht nötig, die ganze Fläche zu drehen. Ja, es ist sogar konstruktiv und ärodynamisch günstiger, lediglich ihren hinteren Teil (Ruder) an dem mit der Zelle starr verbundenen vorderen (Flosse) drehbar anzuordnen. Dann ändert sich mit dem Ruderausschlag nicht nur der Anstellwinkel, sondern auch das Profil der Hilfsfläche. Dabei stellt die Höhensteuerung um so größere Ansprüche an die auf

diese Art erreichbaren zusätzlichen Luftkräfte, je größer die Stabilität ist.

Nur ausnahmsweise hat man bei der Berechnung des Moments der Luftkräfte das Moment der Widerstände zu berücksichtigen, dem in der Praxis, wie aus dem unklaren Begriff des Widerstandsmittelpunktes folgt, eine Bedeutung beigelegt wird, die sich in Anbetracht der sonst wirksamen Momente keineswegs rechtfertigen läßt.

Die Betrachtung der Längsbewegungen, die sich an die Auseinandersetzung über die Höhensteuer anschließt, hat konstruktiv kein anderes Ziel, als quantitativ den Betrag der Dämpfung und der statischen Stabilität zu bestimmen, der schnellster Beilegung von Gleichgewichtsstörungen dient. Das überaus verwickelte Bewegungsproblem, das das Flugzeug bietet, und das mathematisch die Gestalt einer Differentialgleichung zwölfter Ordnung annähme, läßt sich unter wenigen, völlig gerechtfertigten Voraussetzungen auf zwei voneinander unabhängige Differentialgleichungen vierter Ordnung reduzieren, deren eine die Längsbewegungen, und deren andere die Querbewegungen umfaßt. Man hat lediglich anzunehmen, daß das Flugzeug vollkommen symmetrisch sei, und daß die Änderung der Erdbeschleunigung und der Luftdichte für die geringe Dauer der Betrachtung verschwindend klein sei. Es ist selbstverständlich, daß auch noch unter diesen vereinfachenden Voraussetzungen die Bewegungsgleichungen, aus denen die Differentialgleichungen vierter Ordnung hervorgehen, streng nur für unendlich kleine Störungen zutreffen. Aber in Anbetracht der wesentlich linearen Abhängigkeit der Luftkräfte und deren Momente vom Anstellwinkel sind Folgerungen auch für endliche Störungen durchaus zulässig. Ja, man gewinnt, wenn man nur zu den Vorstellungen, die beim Ansatz der Bewegungsgleichungen zugezogen werden, nach den mathematischen Operationen zurückkehrt, so anschauliche Vorstellungen der Bewegungsvorgänge, daß man zum mindesten Folgerungen qualitativer Art auch für ungewöhnlich große Störungen daraus ziehen kann.

Erinnert man sich, daß eine einfache Schwingung durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung dargestellt wird, so bedeutet die Rückführung der Bewegungsgleichung auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung die Zerlegung des Bewegungsvorgangs in zwei gekoppelte Schwingungen, d. h. zwei Schwingungen, die nach Dauer[1]) und Dekrement völlig voneinander verschieden sein können, obwohl dieselben Kräfte und Momente in ihrem Verlauf wirksam werden, nur in jeweils anderem Maße und verschiedener Weise. Vergleicht man daraufhin die Schwingungsgleichung mit derjenigen, die entsteht, wenn man jede der beiden Schwingungen von nur ihr eigentümlichen Kräften her-

1) Die Periode kann natürlich auch imaginär sein.

vorgebracht denkt, so kann man nach sorgfältiger Ausscheidung unbedeutender Größen recht gut feststellen, durch welche Kombination der aus den Abmessungen des Flugzeugs bestimmbaren Kräfte Dauer und Dämpfung der Schwingungen bestimmt wird.

Aus dieser Betrachtung erhält man ein recht klares Bild über die Art der Bewegungen, die eine Störung wachruft, auch ohne den Verlauf der Bewegung mathematisch darzustellen, wozu wir freilich der Vollständigkeit halber ausführlich Anleitung gegeben haben. Es zeigt sich, daß die Längsbewegungen sich aus zwei Arten Schwingungen zusammensetzen, deren eine Anstellwinkeländerungen mit kurzer Schwingungsdauer und starker Dämpfung schnell beseitigt, während die andere wesentlich von Störungen der Geschwindigkeit wachgerufen wird, die sie selbst bei günstigster Konstruktion verhältnismäßig langsam beilegt. Für einen bestimmten Betriebszustand ist es in beiden Fällen möglich, wie wir schon oben allgemein als vorteilhaft bezeichneten, sich der Grenze zwischen periodischer und aperiodischer Bewegung zu nähern. Die entsprechenden außerordentlich geringen Grade der statischen Stabilität bringen freilich dann die Gefahr mit sich, daß die dynamische Stabilität für andere Betriebszustände zu wünschen übrig läßt. Denn die dynamische Stabilität wird, wenn wir jene geringen rückführenden Kräfte bzw. Momente für den normalen Betriebszustand durch konstruktive Maßnahmen verwirklichen, für die langsamen Schwingungen nicht nur beim Verschwinden der statischen Stabilität, sondern auch mit einer Zunahme derselben schlechter. Und diese Zunahme kann um so eher verhängnisvoll werden, je geringer das Dämpfungsmoment um die Querachse ist. Hat die dynamische Dämpfung ein bestimmtes Mindestmaß erreicht, so bringt weitere Steigerung der statischen Stabilität recht schnell wieder Verbesserung der dynamischen. Daraus läßt sich schließen, daß die allein gefährlichen langsamen Schwingungen, die in einem „Wogen" des Flugzeugs in Erscheinung treten, auf zwei einander widersprechende Weisen beigelegt werden können, indem man einmal das Moment der dämpfenden Kräfte stärker als das der rückführenden Kräfte macht oder umgekehrt die statische Stabilität so steigert, daß sie leicht die widerstrebenden Kräfte des Dämpfungsmoments überwindet. Das im ersten Fall erforderliche Dämpfungsmoment ergibt sich gewöhnlich von selbst, wenn die Steuerflächen in Rücksicht auf die Steuerbarkeit dimensioniert werden, während man im zweiten Fall ungewöhnlich große Höhensteuer und dementsprechend eine geringere Wirtschaftlichkeit erhält. Man muß also unbedingt der ersten Art der Stabilisierung den Vorzug geben und wird daher das Dämpfungsmoment so groß und das rückführende Moment so klein als möglich machen. Da man aber nie ganz sicher sein kann, daß nicht bei endlichen Drehungen die Stabilität ihren Betrag erheblich ändert, muß man dem Dämpfungs-

moment mindestens den Betrag sichern (Gl. 370), der verschwindender dynamischer Dämpfung auf der Grenze beider Stabilisierungsarten entspricht, so daß diese zum mindesten nie negativ werden kann. Und da das Dämpfungsmoment im wesentlichen vom Höhensteuer zu leisten ist, ergibt sich daraus für dasselbe eine bestimmte Mindestgröße, die dann konstruktiv maßgebend wird, wenn sie oberhalb der aus den Bedingungen der Steuerbarkeit entwickelten Steuergröße liegt.

Dadurch, daß wir die Änderung des Schubes mit der Geschwindigkeit berücksichtigt haben, ergibt sich in Überholung entsprechender Folgerungen früherer Arbeiten, daß die dynamische Dämpfung in nur ganz untergeordnetem Maße von der Flugrichtung gegenüber der Wagerechten abhängt und sogar für Gleitflug und Motorflug nahezu gleich ist. Der Einfluß der Lage des Schubes gegenüber dem Schwerpunkt, der hier auch zum erstenmal berücksichtigt wird, ist demgegenüber von erheblich größerer Bedeutung. Es ist der Stabilisierung nachteilig, wenn die Achse der Schrauben oberhalb des Schwerpunkts liegt. Auch hierfür werden ausführlich anschauliche Gründe gegeben.

Aber nicht nur unwillkürliche Störungen, wie sie durch Änderungen der Windrichtung und Windstärke eintreten können, sondern auch Wirkungen willkürlicher Änderungen des Gleichgewichts gestatten die Bewegungsgleichungen zu verfolgen. Man kann so durch die Darstellung der drei Abhängigen, durch die die Bewegung als Funktion der Zeit beschrieben wird, ein Bild gewinnen von den Vorgängen, die Drosseln des Motors, Betätigung des Höhensteuers und das Abwerfen schwerer Körper mit sich bringen. Von besonderer Bedeutung ist hier der Vorgang des Abfangens, bei dem ungewöhnlich hohe Anforderungen an die Steuerbarkeit gestellt werden. Für die erforderlichen Zusatzkräfte haben wir eine Näherungsformel entwickelt, die erlaubt, die Abmessungen des Steuers auch nach dieser Richtung zu prüfen.

In durchaus gleicher Weise wie die Längsbewegungen lassen sich die Querbewegungen analysieren. Hier sind die Gleichgewichtsbedingungen aus Symmetriegründen von vornherein erfüllt, und es kann sich überhaupt nur um Entscheidungen über den Grad der statischen und dynamischen Stabilität handeln. Die Bewegungsgleichungen haben ähnliche Gestalt wie bei Berechnung der Längsbewegungen, aber die Berechnung der darin enthaltenen Konstanten ist insofern verwickelter, als die wesentlich wagerechten Tragflächen in ganz anderer Weise auf deren Werte einwirken als die wesentlich lotrechten Kielflossen, und man mit Kielflossenpaaren wiederum das Verhalten des Flugzeugs noch weitgehender beeinflussen kann als mit den üblichen in der Symmetrieebene liegenden einfachen Kielflossen. Auch hier zeigt es sich wieder für die möglichst schnelle Beseitigung von Störungen vorteilhaft, die statische Stabilität

nicht über ein durch die statische Dämpfung bestimmtes Maß hinauszusteigern, um die Bewegung möglichst auf der Grenze zwischen der periodischen und aperiodischen Bewegung verlaufen zu lassen. Die Näherungslösungen, die sich wiederum aus der Auflösung der Koeffizienten der Gleichung vierten Grades, die Dauer und Dekrement der gekoppelten Schwingungen zu liefern berufen ist, ergeben, lassen wieder zwei grundsätzlich verschiedene Bewegungsarten unterscheiden; die eine ist eine verhältnismäßig kurze und stark gedämpfte Schwingung um die Lotachse in der Art einer Windfahne, die andere eine ebenfalls sehr stark gedämpfte aperiodische Bewegung um die Längsachse. Während die erste Schwingung immer stabiler Art ist, wenn die Flossen hinter dem Schwerpunkt liegen, läßt sich Stabilität für die zweite Bewegungsart in konstruktiv zulässiger Weise nur durch starke *V*-Form erreichen, die um so wirksamer ist, je kleiner das stabilisierende und je größer das dämpfende Moment in bezug auf die Lotachse ist. Man kann diese Stabilisierung dadurch unterstützen, daß man den Anstellwinkel der Tragflügel von innen nach außen abnehmen läßt. Denn die ohne weiteres gegebene Labilität der Zellen läßt sich darauf zurückführen, daß bei einer unerwünschten seitlichen Richtungsänderung außen liegende Flügelelemente stärkeren Wind empfangen als innenliegende, und infolgedessen ein Moment entsteht, das das Flugzeug um die Längsachse zu drehen sucht in dem Sinne, daß es sich nach dem augenblicklichen Krümmungsmittelpunkt seiner Bahn hinneigt, und infolgedessen der Auftrieb, der immer senkrecht zu den Tragflächen steht, eine wagerechte Komponente liefert, die die Richtungsänderung noch zu vergrößern trachtet. Das schräglegende Moment, das diese Wirkung vermittelt, ist nun natürlich um so geringer, je kleiner der Anstellwinkel derjenigen Flächenelemente ist, die bei einer Richtungsänderung den größten Geschwindigkeitsunterschieden ausgesetzt sind. Danach dient es, wie gesagt, der Steigerung der Richtungsbeständigkeit, wenn man den Hinterholmen, was konstruktiv bis zu erheblichem Maße ohne Erschwerung der Herstellung lediglich durch Verspannen möglich ist, stärkere *V*-Form gibt als den Vorderholmen. Pfeilförmige Flugzeuge, bei denen die Längsstabilisierung nur auf diese Weise erreicht werden kann, besitzen also von vornherein eine geringere Seitenlabilität, so daß die zur völligen Stabilisierung noch erforderliche *V*-Form geringer sein kann, als wenn der Anstellwinkel mit unveränderlichem Betrag von innen nach außen durchliefe.

Die Beseitigung der eben beschriebenen seitlichen Labilität durch die Anordnung einer *V*-Form läßt sich so erklären, daß der seitliche Windeinfall, den jede Änderung der Flugrichtung bei unveränderter Lage der Längsachse mit sich bringt, einen vergrößerten Anstellwinkel auf der dem Wind zugekehrten, einen verkleinerten auf der dem Wind abgekehrten

Seite findet, und die entsprechend gesteigerten bzw. geminderten Auftriebskräfte das Flugzeug aus der Schräglage, in die es durch das labilisierende Moment gekommen ist, wieder aufrichten. Dabei die Längsachse sich selbst, wie erforderlich, parallel zu halten, ist das Bestreben des um die Lotachse wirksamen Dämpfungsmoments, während im Gegenteil das Richtmoment der Flossen bestrebt ist, das Flugzeug in die augenblickliche Flugrichtung einzustellen. Daraus folgt, daß es nicht allein einer schnellen Beilegung der Schwingungen um die Lotachse zuträglich ist, dieses Richtmoment so klein wie möglich zu halten, sondern daß es die einzige Möglichkeit liefert, die stabilisierende Wirkung der *V*-Form zur Geltung kommen zu lassen.

Momente um die Längsachse, gleichgültig, ob sie nun stabilisierend oder labilisierend sind, begegnen immer einem erheblichen Dämpfungswiderstand. Denn Drehungen um die Längsachse haben natürlich für die eine Flügelhälfte eine Vergrößerung, für die andere eine Verkleinerung des Anstellwinkels und damit des Auftriebs zur Folge. Daher ist auch eine vollkommene seitliche Stabilisierung nur dann erwünscht, wenn man dem Führer auch die Aufgabe abnehmen will, die seitlichen Lagenstörungen, die sich nur sehr langsam vergrößern, durch Betätigung der Querruder wieder aufzuheben. Ja, es gibt Führer, die die mit der *V*-Form wachsende Empfindlichkeit gegen seitliche Böen für nachteiliger halten als die Labilität von Flugzeugen mit schwacher *V*-Form.

Freilich ist das Dämpfungsmoment um die Längsachse nicht für jeden Betriebszustand gleich stark. Wir wissen, daß die Änderungen des Auftriebs mit dem Anstellwinkel kleiner werden, je größer der Anstellwinkel an sich ist, ja, daß sie, sobald der Auftrieb sein Maximum erreicht hat, verschwinden. Dieser Umstand birgt die größte Gefahr, der das Flugzeug überhaupt während des Fluges ausgesetzt ist, in sich. Denn sobald der größte zulässige Anstellwinkel überschritten wird, verschwindet das Dämpfungsmoment um die Längsachse, und dementsprechend wird sich das Flugzeug augenblicklich auf die Seite legen und abstürzen. Während des Sturzes wird es sich natürlich infolge der Wirkung der Flosse so einstellen, daß die Längsachse senkrecht zu liegen kommt, und dann kann der Führer das Flugzeug mit Hilfe des Höhensteuers wieder aufrichten.

Natürlich haben wir auch hier wie bei den Längsbewegungen den Verlauf erzwungener Bewegungen zu betrachten. Dabei zeigt sich, wie aus dem Vorstehenden ohne weiteres erklärlich ist, daß Kursänderungen außerordentlich viel schneller durch die Quersteuer als durch Seitensteuer herbeigeführt werden können. Denn durch Schräglegen des Flugzeugs allein bekommt man in den wagerechten Komponenten des Auftriebs hinreichende Zentripetalkräfte, um die Richtung schnell ändern zu können,

während das Seitensteuer zunächst nur scheinbare und erst in sekundärer Folge wirkliche Richtungsänderungen herbeizuführen imstande ist. Für starke und plötzliche Wendungen wird man freilich beide Steuer zugleich benutzen, wobei das Seitensteuer vor allem den Drehwiderstand des Flugzeugs um die Lotachse zu überwinden hat.

Schließlich haben wir noch aus der Betrachtung von Anlauf und Landung diejenigen Richtlinien entwickelt, nach denen das „Fahrwerk" der Flugzeuge zu konstruieren ist. Hierbei stellen Anlauf und Auslauf, die in jedem Fall so kurz als möglich sein sollen, grundsätzlich entgegengesetzte Forderungen. Denn ein kurzer Anlauf fordert, damit ein möglichst großer Teil der Nutzleistung für die Beschleunigung des Flugzeugs aufgebracht werden kann, möglichst kleine Reibung der Stützpunkte desselben, eine Verkürzung des Auslaufs jedoch möglichst starke Reibung. Man wird also die drei Auflagerpunkte, die zur statisch stabilen Stützung mindestens erforderlich sind, als Räder ausbilden, um mit rollender Reibung starten zu können, und beim Auslauf die Räder abbremsen oder gar durch Kufen (Hemmschuhe) ersetzen.

Aus der Strecke, die der Anlauf bzw. die Landung (Abfangen, Ausschweben, Aufsetzen, Ausrollen) erfordern (Fig. 45), ergeben sich je nach dem Typ verschiedene Anforderungen an die Größe der Landungsplätze. Natürlich erreichen diese Strecken Größtwerte bei Windstille, da man bei Wind immer entgegen der Windrichtung starten und landen wird, um mit geringster Geschwindigkeit vom Boden abkommen bzw. auf ihn aufsetzen zu können.

Zudem haben wir außer acht gelassen, daß der Auftrieb unter sonst gleichen Umständen in Bodennähe wächst. Nach Göttinger Messungen (Lit. 41) ist er um etwa 12 bis 15% größer als im freien Fluge, wenn der Flügel sich nur noch um ein Zehntel seiner Spannweite über Boden befindet. Dieser Umstand macht sich natürlich in der Weise geltend, daß man das Flugzeug bereits früher abheben bzw. länger ausschweben lassen kann, als die Rechnung annimmt. Bei guter Führung werden also Anlauf und Auslauf kürzer, als aus der Rechnung folgt.

Demnächst ergibt sich aus der unvermeidlichen Unsicherheit, mit der der Führer die Höhe über dem Boden abschätzt, eine bestimmte Mindestforderung an die Elastizität der Stützpunkte, die beim Durchsacken nach dem Ausschweben im Augenblick des Aufsetzens in Anspruch genommen wird. Für die Aufnahme der Landungsstöße genügt natürlich die Formänderungsfähigkeit der Radreifen nicht, selbst wenn man hierfür wie bei schnellen Kraftwagen lufterfüllte Gummireifen mit mehreren Atmosphären-Pressungsdruck verwendet, sondern es bedarf noch eines elastischen Zwischengliedes zwischen Radachse und Achslager, für das man aus der Rechnung bestimmte Maße erhält.

Auch für Zelle und Höhensteuer ist die Betrachtung des Landungsvorgangs von Bedeutung. Denn zum Zwecke des Abfangens muß man die Auftriebskräfte der Zelle durch Vergrößerung des Anstellwinkels steigern, um die Flugrichtung, die während des Gleitfluges geneigt ist, in die Wagerechte umzulenken, damit das Flugzeug bis zum Erreichen seiner geringsten Schwebegeschwindigkeit in Bodennähe ausschweben und mit geringstem Landungsstoß aufsetzen kann. Ist die Geschwindigkeit am Ende des Gleitfluges nur 40% größer als die kleinste Schwebegeschwindigkeit, so wird bei schnellem Abfangen bereits die Zelle doppelter Beanspruchung ausgesetzt.

Literaturverzeichnis.[1]

Abkürzungen: Z. F. M. = Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. —
W. G. L. = Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt.
T. B. = Technische Berichte der Flugzeugmeisterei, herausgegeben von der Inspektion der Fliegertruppen.

1. Bader, H. G.: Das Höhensteuer der Flugzeuge, Z. F. M. 1917, S. 116.
2. — Einführung in die Dynamik der Flugzeuge, Forschungsarbeiten des Vereins Deutscher Ingenieure, Heft 189—190. Auszugsweise in Z. F. M. 1917, S. 43.
3. — Grundlagen für planmäßige Flugzeugberechnung, Z. F. M. 1918, S. 17.
4. — Theorie der Flugzeugmodelle, Z. F. M. 1917, S. 138.
5. — Theorie und Praxis des Fliegens, Z. F. M. 1917, S. 1.
6. — Über eine Versuchseinrichtung zur kinematographischen Messung der Schwingungen freifliegender Modelle, W. G. L., Bd. III, S. 65.
7. Bendemann, F.: Luftschraubenuntersuchungen. Berichte der Geschäftsstelle für Flugtechnik des Sonderausschusses der Jubiläumsstiftung der Deutschen Industrie, Heft 3. München und Berlin 1918, S. 35.
8. Bendemann, F. und Madelung, G.: Praktische Schraubenberechnung T. B., Bd. II, S. 53.
9. Betz, A.: Die gegenseitige Beeinflussung zweier Tragflächen, Z. F. M. 1914, S. 253.
10. Bothézat: Étude de la Stabilité de l'aéroplane. Dissertation. H. Dunod et E. Pinat 1911, S. 98.
11. Bryan, S. H : Stabilität der Flugzeuge. Übersetzt von H. G. Bader, Springer 1914.
12. Bryan, S. H. und Williams, W. E.: The Longitudinalstability of Aerial Gliders. Proceedings of the Royal Society of London, February 1904, Abschnitt 8.
13. Deimler: Stabilitätsuntersuchungen über symmetrische Gleitflieger. Göttinger Dissertation. München 1910, S. 52. Auszugsweise in der Z. F. M. 1910, S. 94.
14. Eiffel, G.: La Résistance de l'air et l'aviation. Expériences effectuées au Laboratoire du Champ-de-Mars. H. Dunod et E. Pinat 1910.
15. — La Résistance de l'air et l'aviation. Expériences effectuées au Laboratoire à Auteuil. H. Dunod et E. Pinat 1914.
16 Föppl, O.: Mitteilungen aus der Göttinger Modellversuchsanstalt. Auftrieb und Widerstand eines Höhensteuers, das hinter der Tragfläche angeordnet ist. Z. F. M. 1911, S. 182.
17 — Windkräfte an Ebenen und gewölbten Platten. Dissertation Aachen. Berlin 1911.

---

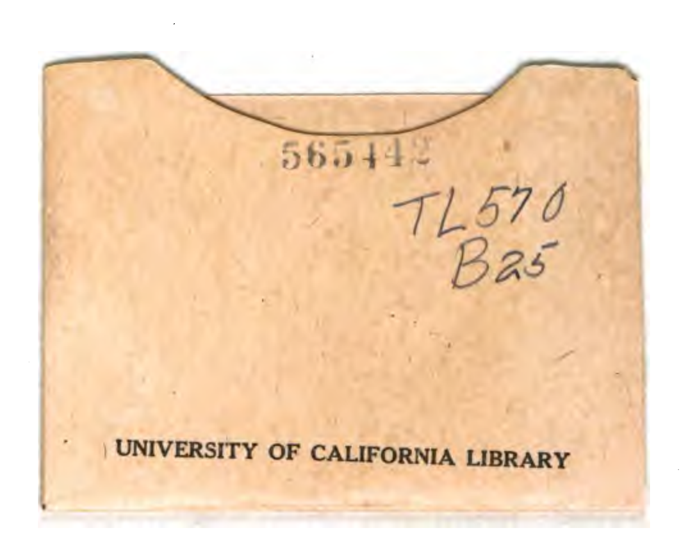
1) Verweise im Text mit (Lit . . .).

18. Gehlen. Karl: Querstabilität und Seitensteuerung von Flugmaschinen. Dissertation. Aachen 1912.
19. Grammel, R.: Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Braunschweig 1917, S. 15.
20. Hurwitz: Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Math. Annalen 46.
21. v. Kármàn Th. und Trefftz, E.: Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte. Z. F. M. 1918, S. 111.
22. — Über Längsstabilität und Längsschwingungen von Flugzeugen. W. G. L. Bd. III, S. 117.
23. Kumbruch, H.: Der Luftwiderstand von Stirnkühlern. T. B., Bd. II, S. 1.
24. Kutzbach, K.: Anpassung des Flugmotors an die Flughöhe. T. B., Bd. III, S. 112.
25. Lanchester, F. W.: Ärodynamik. Aus dem Englischen übersetzt von F. und A. Runge. Teubner 1909.
26. v. Mises, R.: Zur Theorie des Tragflächenauftriebs. Z. F. M. 1917, S. 157.
27. Munk, M.: Messungen an Rumpfmodellen. T. B., Bd. II. S. 23.
28. — Bericht über Widerstandsmessungen von Streben. T. B., Bd. I. S. 85.
29. — Beitrag zur Ärodynamik der Flugzeugtragorgane. T. B., Bd. II, S. 211.
30. Munk, M. und Hückel, E.: Systematische Messungen an Flügelprofilen T. B., Bd. I, S. 148.
31. — Weitere Untersuchungen von Flügelprofilen. T. B., Bd. I, S 204.
32. — Weitere Göttinger Flügelprofiluntersuchungen. T. B., Bd. II, S. 407.
33. Munk, M. und Pohlhausen, A.: Messungen an einfachen Flügelprofilen. T. B., Bd. I, S. 164.
34. Prandtl, L.: Bemerkungen über Dimensionen und Luftwiderstandsformeln. Z. F. M., 1910, S. 157.
35. — Ergebnisse und Ziele der Göttinger Modellversuchsanstalt. Verhandlung der Versammlung von Vertretern der Flugwissenschaft vom 3. bis 5. November 1911 zu Göttingen. Z. F. M. 1912, S. 34.
36. Quittner, V.: La Technique moderne. Oktobre und Decembre 1910, Fevrier 1911. Auszugsweise W. G. L., Bd. III, S. 144.
37. Reißner, H.: Einige Bemerkungen zur Seitenstabilität der Drachenflieger. Z. F. M. 1912. S. 39.
38. — Über eine neue notwendige Bedingung für automatische Seitenstabilität der Drachenflieger. Flugsport 1910.
39. — Die Seitensteuerung der Flugmaschinen. Z. F. M. 1910, S. 101.
40. Runge: Über die Längsschwingungen der Flugmaschinen. Z. F. M. 1911, S. 193 ff.
41. Versuchsanstalt, Mitteilungen aus der Göttinger Modell-, Auftrieb und Widerstand einer Tragfläche in der Nähe einer horizontalen Ebene. Z. F. M. 1912, S. 217.
42. Versuchsanstalt für Luftfahrt in Teddington. Die Druckverteilung über Tragflächen nach englischen Messungen von Dipl.-Ing. Max Munk, Göttingen. Z. F. M. 1916, S. 133.
43. Wegener, A.: Thermodynamik der Atmosphäre. Leipzig 1911, S. 129.

Während der Drucklegung erschienen:

v. Mises, R.: Fluglehre. Springer 1918.
Pröll, A.: Flugtechnik. Oldenbourg 1919.
Bader, H. G.: Die Entwicklung des Verkehrsflugzeugs. Braunbeck 1920.




565442
TL570
B25
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

